

机密★启用前(新高考卷)

华中师范大学第一附属中学 2021 年高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题:

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9   | 10 | 11  | 12  |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|----|-----|-----|
| 答案 | D | B | C | B | C | D | C | D | BCD | AD | ABD | ACD |

1.【答案】D

【解析】由已知  $(\mathbb{Q}_m \setminus \mathbb{N}) \subseteq (\mathbb{Q}_n \setminus \mathbb{M})$  得:  $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ , 得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点  $(a, 2)$  到焦点  $F$  的距离等于到准线  $y = -\frac{1}{4m}$  的距离, 则  $2 + \frac{1}{4m} = \frac{17}{8}$ , 解得  $m = 2$ .

3.【答案】C

【解析】 $P = \frac{C(\frac{1}{2})^2}{C(\frac{3}{4})^2} = \frac{3}{10}$ .

4.【答案】B

【解析】设数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 若  $q = 1$ , 则  $\frac{S_{2m}}{S_m} = 2$ , 与题中条件矛盾, 故  $q \neq 1$ .

$\therefore \frac{S_{2m}}{S_m} = \frac{a_1(1-q^{2m})}{a_1(1-q^m)} = q^m + 1 = 9, \therefore q^m = 8, \therefore \frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{a_1 q^{2m-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^m = 8 = \frac{5m+1}{m-1}, \therefore m = 3, \therefore q^3 = 8, \therefore q = 2$ . 故

选 B.

5.【答案】A

【解析】设  $A_1, A_2$  两处的海拔高度分别为  $h_1, h_2$ , 则  $\frac{h_1}{p_1} = \frac{1}{2} = \frac{p_0 e^{-\frac{h_1}{H}}}{p_0 e^{-\frac{h_2}{H}}} = e^{\frac{h_2 - h_1}{H}}$ .

$\therefore h_2 - h_1 = \frac{-\ln 2}{0.000126} \approx -0.693$ .

6.【答案】D

【解析】方法一: 由题知  $\vec{DP} = \frac{1}{4}\vec{DC}$ , 则  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} + \vec{DP}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DP} =$

$|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cos 60^\circ + \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2 = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 16 = 10$ , 故选 D.

方法二: 如图, 以  $A$  为原点,  $AB$  所在直线为  $x$  轴, 过点  $A$  且垂直于  $AB$  的直线为  $y$  轴, 建立直角坐标系, 则  $A(0, 0), B(4, 0), D(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \vec{DP} = 3$

$\vec{DP}, \therefore |\vec{DP}| = 1, \therefore P(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \vec{AP} = (\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \vec{AB} = (4, 0), \therefore \vec{AP} \cdot \vec{AB} =$

$\vec{AB} = \frac{5}{2} \times 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 0 = 10$ , 故选 D.

7.【答案】C

【解析】 $f(x) = \log_3(9^x + 1) - x = \log_3(3^x + 3^{-x}), \therefore f(x)$  为偶函数且在  $(0, +\infty)$  上为增函数.

数学参考答案和评分标准 第 1 页(共 7 页)

则  $b = f(-e^{-\frac{1}{a}}) = f(e^{-\frac{1}{a}}), \therefore e^{-\frac{1}{a}} - 1 \geq 0$  (当且仅当  $x = 0$  时取等号),  $\therefore e^{-\frac{1}{a}} > -1 (x \neq 0)$ .

故  $e^{-\frac{1}{a}} > -\frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10}$ , 即  $b > a$ ;  $\therefore \ln a - x + 1 \leq 0$  (当且仅当  $x = 1$  时取等号),

$\therefore \ln a < x - 1 (x \neq 1), \therefore \ln \frac{11}{10} < \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}, \therefore a > e$ , 综上  $b > a > e$ , 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设  $AB$  的中点为  $M$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$ , 则  $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0 \end{cases}, \therefore \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} -$

$\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$ , 则  $k_{AB} \cdot k_{BM} = \frac{b^2}{a^2}, \therefore k_{BM} = \frac{3b^2}{a^2}$ , 设直线  $AB$  的倾斜角为  $\theta, \therefore |AF_2| = |BF_2|$ .

$\therefore AB \perp MF_2, \therefore |OM| = |OF_1| = |OF_2|$ , 则  $OM$  的斜率为  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}, \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$ .

$\therefore$  双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 故选 D.

9.【答案】BCD

【解析】由虚部概念知 A 错误; 由  $\cos 140^\circ < 0, \sin 140^\circ > 0$ , B 正确; 由  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$ , C 正确;

$\therefore z^2 = \cos^2 140^\circ - \sin^2 140^\circ + 2i \sin 140^\circ \cos 140^\circ = \cos 280^\circ + i \sin 280^\circ$ .

$\therefore z^4 = z^2 \cdot z^2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , D 正确.

10.【答案】AD

【解析】对 A, 因为中位数为 2, 故最大值不会大于  $2 + 5 = 7$ , 故 A 正确;

对 B, 失分数据分别为 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 8, 则满足平均数为 2, 众数为 2, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 B 错误;

对 C, 失分数据分别为 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 9, 则满足平均数为 1, 方差大于 0, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 C 错误;

对 D, 利用反证法, 假设有一同学失分超过 7 分, 则方差大于  $\frac{1}{10} \times (8-2)^2 = 3.6 > 3$ , 与题设矛盾, 故每名同学失分都不超过 7 分, 故 D 正确.

11.【答案】ABD

【解析】若  $F$  为  $AD$  中点, 连接  $BF$  交  $AE$  于点  $H$ , 则  $AE \perp$  面  $MBF$ , 又  $AE \subset$  面  $MAE$ , 所以平面  $AEM \perp$  平面  $MBF$ , A 正确;

取  $AM$  中点  $P$ , 则  $PQ \parallel \frac{1}{2}AD$ , 又  $CE \parallel \frac{1}{2}AD$ ,  $\therefore PQ \parallel CE$ .

$\therefore CQ \parallel EP$ , B 正确;

过  $M$  作  $MO \perp$  平面  $AECD$ , 则  $O$  在  $BF$  上, 所以平面  $AEM \perp$

平面  $AECD$  所成锐二面角为  $\angle MHB$  (或其补角),  $\therefore \sin \alpha = \frac{MO}{MH}, \sin \beta = \frac{MO}{ME} = \frac{MO}{\sqrt{2}MH}, \therefore \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$ , C 错误;

若  $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$ , 又  $\cos \alpha = \frac{OH}{MH}, \cos \beta = \frac{OE}{ME} = \frac{OE}{\sqrt{2}MH}$ , 则  $OE = 2OH$ , D 正确.

12.【答案】ACD

数学参考答案和评分标准 第 2 页(共 7 页)

【解析】因为  $f(x+\pi)=f(x)$ ，所以  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的函数，A 正确；

又  $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+1 \neq f(x)$ ，B 错误；

由 A 知只需考虑  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上的最大值。

①当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时，令  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ，则  $t \in [1, \sqrt{2}]$ ， $f(x) = -t^2 + t = u(t)$ ，易知  $u(t)$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上单调递减，所以  $f(x)$  的最大值为  $u(1)=0$ ，最小值为  $u(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2$ 。

②当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时，令  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ，则  $t \in [-1, \sqrt{2}]$ ， $f(x) = t^2 + t - 2 = v(t)$ ，易知  $v(t)$  在  $[-1, \sqrt{2}]$  上单调递增，所以  $f(x)$  的最大值为  $v(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ，最小值为  $v(-1) = 0$ 。

综合可知：函数  $f(x)$  的最大值为  $\sqrt{2}$ ，最小值为  $\sqrt{2} - 2$ ，C 正确；

因为  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的函数，可以先研究函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上的零点个数，易知  $f(\pi) = 0$ 。

当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时，令  $f(x) = u(t) = -t^2 + t = 0$ ，解得  $t = 0$  或  $1$ 。

$t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上无解， $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上仅有一解  $x = \frac{\pi}{4}$ 。

当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时，令  $f(x) = v(t) = t^2 + t - 2 = 0$ ，解得  $t = -2$  或  $1$ 。

$t = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -2$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上无解， $t = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上也无解。

综合可知：函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上有两个零点，分别为  $x = \frac{\pi}{4}$  和  $x = \pi$ 。

又因为  $f(x)$  是以  $\pi$  为周期的函数，所以，若  $n \in \mathbb{N}^+$ ，则  $f(x)$  在  $(0, n\pi)$  上恰有  $2n$  个零点。

又已知函数  $f(x)$  在  $(0, M\pi)$  上恰有 2021 个零点，所以  $\frac{2021}{2} < M \leq 1011$ ，D 正确。

### 13. 【答案】5

【解析】由已知  $n = 16$ ，展开式通项  $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} (\frac{1}{2\sqrt{x}})^r = C_n^r (\frac{1}{2})^r x^{\frac{n-r}{2}-\frac{r}{2}}$ ，则  $r = 0, 4, 8, 12, 16$  共 5 项。

### 14. 【答案】 $(x-1)^3$ (答案不唯一)

### 15. 【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】球心在平面  $ABCD$  上射影落在四边形  $ABCD$  外接圆圆心处 (即  $AB$  中点)。设球心  $O$  到平面  $ABCD$  的距离为  $d$ ，则由  $R^2 = d^2 + \frac{1}{4}AB^2 = d^2 + 5 \geq 5$  得，外接球半径最小值为  $\sqrt{5}$ 。当  $PO \perp$  面  $ABCD$  时，高最大为  $\sqrt{5}$ 。

### 16. 【答案】253； $\begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【解析】 $a_{905} = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{505^2}{1009}$ ， $b_{905} = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \dots + \frac{501^2}{1009} + \frac{505^2}{1011}$ ，  
 $\therefore a_{905} - b_{905} = 1 + \frac{2^2-1^2}{3} + \frac{3^2-2^2}{5} + \dots + \frac{505^2-501^2}{1009} - \frac{505^2}{1011} = 505 - \frac{505^2}{1011} = \frac{505 \times 506}{505+506}$ ，  
 $\therefore \frac{2}{506} < \frac{1}{a_{905} - b_{905}} = \frac{1}{505} + \frac{1}{506} < \frac{2}{505}$ ，  
 $\therefore 252.5 < a_{905} - b_{905} < 253$ ，  
 $\therefore c_{905} = 253$ 。

数学参考答案和评分标准 第 3 页 (共 7 页)

$$a_n - b_n = n - \frac{n^2}{2n+1} = \frac{n^2+n}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \in \left( \frac{2}{n+1}, \frac{2}{n} \right)$$

$$\therefore \frac{n}{2} < a_n - b_n < \frac{n+1}{2}$$

$$\text{若 } n = 2k (k \in \mathbb{N}^+)，则 c_n = k = \frac{n}{2}。$$

$$\text{若 } n = 2k-1 (k \in \mathbb{N}^+)，则 c_n = k = \frac{n+1}{2}。$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

### 17. 【解析】

$$(1) \because a_n - 2n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + n - 1 = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - 2n + 2) (n \geq 2)，\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1} (n \geq 2)，又 b_1 = a_1 - 2 = -\frac{1}{2} \neq 0，\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

则数列  $\{b_n\}$  是以  $-\frac{1}{2}$  为首项， $-\frac{1}{2}$  为公比的等比数列。

$$\therefore a_n = b_n + 2n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2n，\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore S_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + n(n+1) = \frac{1}{3} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right] + n(n+1)，\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(2) \because b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1} (n \geq 2)，b_1 = a_1 - 2，$$

若  $a = 2$ ，则  $b_n = 0$ ， $\therefore a_n = 2n$ ， $\therefore a_{n+1} - a_n = 2$ ，此时数列  $\{a_n\}$  为等差数列， $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

若  $a \neq 2$ ，则数列  $\{b_n\}$  为以  $a-2$  为首项， $-\frac{1}{2}$  为公比的等比数列， $\therefore a_1 = a, a_2 = -\frac{1}{2}a + 5, a_3 = \frac{1}{4}a + \frac{11}{2}$ ，

$\therefore a_1 + a_3 \neq 2a_2$ ，此时数列  $\{a_n\}$  不可能为等差数列， $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

综上， $\exists$  实数  $a = 2$ ，使数列  $\{a_n\}$  为等差数列， $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

### 18. 【解析】

$$(1) \text{连接 } AC，AB = BC = 3，\angle ABC = 60^\circ，\therefore AC = 3 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \angle ADC = 120^\circ，在 \triangle ACD \text{ 中由余弦定理，} \cos 120^\circ = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}，即 -\frac{1}{2} = \frac{AD^2 - 6}{2\sqrt{3}AD}，\therefore AD = \sqrt{3} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的外接圆半径 } R = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3} \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \triangle OAD \text{ 为正三角形，} \angle AOD = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle ABD \text{ 所对的圆弧 } \widehat{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi，\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{在 } \triangle ACD \text{ 中，由余弦定理 } \cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}$$

$$\text{即 } AD^2 + CD^2 + AD \cdot CD = 9，\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

数学参考答案和评分标准 第 4 页 (共 7 页)

又  $AD^2 + CD^2 \geq 2AD \cdot CD$ ,  $\therefore 9 - AD \cdot CD \geq 2AD \cdot CD$

$\therefore AD \cdot CD \leq 3$  当且仅当  $AD = CD = \sqrt{3}$  时等号成立 (10分)

$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin 120^\circ \leq \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ .

所以四边形  $ABCD$  面积的最大值为  $3\sqrt{3}$ . (12分)

19.【解析】

(1) 结论①正确, 结论②错误, 理由如下: (1分)

对于结论①, 因为  $EA \parallel FC$  且  $FC = EA = 4$ , 连接  $AC$ , 所以四边形  $EACF$  是平行四边形.

所以  $EF \parallel AC$ , 因为  $EF \subset$  平面  $ABCD$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ .

$\therefore EF \parallel$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore$  结论①正确.

对于结论②, 若  $AF \perp$  平面  $EBD$ , 则  $AF \perp BD$ . (3分)

因为  $EA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $EA \parallel FC$ , 所以  $FC \perp$  平面  $ABCD$ .

所以  $FC \perp BD$ , 又因为  $AF \cap FC = F$ , 所以  $BD \perp$  平面  $AFC$ .

所以  $BD \perp AC$ , 而在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp AB$ .

$AD = AB = 2$ ,  $BC = 4$ , 所以  $CD = 2\sqrt{2} \neq BC$ , 与  $BD \perp AC$  矛盾.

所以结论②错误. (6分)

(2) 方法一: 连接  $AC$ , 交  $BD$  于点  $G$ , 连接  $EG$ , 则在平面  $EACF$  中,  $AF$  与  $EG$  相交, 设交点为  $H$ , 则由  $AC \parallel EF$  可得:  $\frac{AG}{GE} = \frac{AH}{HE}$ , 又  $\frac{AG}{GE} = \frac{AC}{EC} = \frac{AD}{DC}$ .

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{AH}{HE} = \frac{1}{3}.$$

该七面体的体积等于  $V_{E-ABD} + V_{F-BD} + V_{F-BD}$ .

$$= V_{E-ABD} + 3V_{A-BD} + 2V_{E-ABD} = 6V_{E-ABD}$$

$$= 6 \times \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 16. (12分)$$

方法二: 将该七面体补成如图所示的长方体:

$$V_{ABCD-EFGH} - V_{B-EFI} - V_{F-BD} - V_{D-BFH} = 2 \times 4 \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 4 -$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 2 - \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \times 2 = 32 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 16$$

方法三: 建立空间直角坐标系, 利用空间向量求点  $F$  到平面  $BED$  的距离

后求三棱锥  $F-BED$  的体积 (参照给分)

20.【解析】

| (1) | 不太熟悉 | 比较熟悉 | 合计  |
|-----|------|------|-----|
| 男性  | 120  | 80   | 200 |
| 女性  | 110  | 160  | 270 |
| 合计  | 230  | 240  | 470 |

$$\therefore K^2 = \frac{500(120 \times 160 - 110 \times 80)^2}{260 \times 240 \times 200 \times 300} \approx 8.547 > 6.635.$$

$\therefore$  有 99% 的把握认为该企业员工对消防知识的了解程度与性别有关. (5分)

(2)  $A, B$  在一轮比赛中积 1 分的概率为:

$$P = C_1^1 P_1 (1 - P_1) (C_2^2 P_2)^2 + C_2^2 (P_1)^2 C_1^1 P_2 (1 - P_2) + C_2^2 (P_1)^2 (C_2^2 P_2)^2$$

$$= 2P_1 P_2 (P_1 + P_2) - 3(P_1 P_2)^2, \dots \dots \dots (7分)$$

$$\text{又 } P_1 + P_2 = 1, 0 \leq P_1 \leq 1, \text{ 则 } P_1 P_2 = (1 - P_2) P_2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore P = 2P_1 P_2 - 3(P_1 P_2)^2 = -3\left(P_1 P_2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}, \text{ 且 } 0 \leq P_1 P_2 \leq \frac{1}{4}, \dots \dots \dots (8分)$$

$$\therefore P_{\max} = \frac{1}{3}, \text{ 此时 } P_1 P_2 = \frac{1}{4}, \dots \dots \dots (10分)$$

设  $A, B$  所在的小组在  $n$  轮比赛中的积分为  $\xi$ , 则  $\xi \sim B(n, p)$ .

$$\therefore E\xi = \frac{5}{16}n \geq 5, \therefore n \geq 16. \text{ 所以理论上至少要进行 16 轮比赛. } \dots \dots \dots (12分)$$

21.【解析】

$$(1) f(x) \text{ 的定义域为 } (-1, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x+1} + 2mx, \dots \dots \dots (1分)$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{2} + 2m = \frac{13}{2}, \therefore m = 3, \dots \dots \dots (2分)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x+1} + 6x = \frac{6x^2 + 6x + 1}{x+1},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{6} > -1, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } -1 < x < x_1 \text{ 或 } x > x_2; \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } x_1 < x < x_2.$$

所以  $f(x)$  在  $(-1, x_1)$  和  $(x_2, +\infty)$  上单调递增, 在  $(x_1, x_2)$  上单调递减

$$\text{即 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left(-1, \frac{-3 - \sqrt{3}}{6}\right) \text{ 和 } \left(\frac{-3 + \sqrt{3}}{6}, +\infty\right),$$

$$\text{单调递减区间为 } \left(\frac{-3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{-3 + \sqrt{3}}{6}\right). \dots \dots \dots (6分)$$

$$(2) \text{ 由题意知 } g(x) = \ln(x+1) + mx^2 - \sin x, g'(x) = \frac{1}{1+x} + 2mx - \cos x, g'(0) = 0,$$

$$\text{令 } h(x) = g'(x), \text{ 则 } h'(x) = 2m - \frac{1}{(1+x)^2} + \sin x, h'(0) = 2m - 1 \dots \dots \dots (7分)$$

$$\text{若 } 0 < m < \frac{1}{2}, \text{ 则当 } x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } y = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ 单调递增, 所以 } h'(x) \text{ 在 } \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增.}$$

$$\text{又因为 } h'(0) = 2m - 1 < 0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2m + 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)^2} > 0,$$

因此存在  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  使得  $h'(x_0) = 0$ .

所以当  $x \in (-1, x_0)$  时,  $h'(x) < h'(x_0) = 0, g'(x) = h(x)$  在  $(-1, x_0)$  上单调递减, 又  $g'(0) = h(0) = 0$ ,

所以当  $x \in (-1, 0)$  时,  $g'(x) > 0$ ; 当  $x \in (0, x_0)$  时,  $g'(x) < 0$ .

所以  $g(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递增, 在  $(0, x_0)$  上单调递减, 符合题意 (10分)

$$\text{若 } m \geq \frac{1}{2}, \text{ 当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } h'(x) = 2m - \frac{1}{(1+x)^2} + \sin x \geq 1 - \frac{1}{(1+x)^2} + \sin x > 0,$$

所以  $h(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增,  $g'(x) > g'(0) = 0, g(x)$  在  $0, \frac{\pi}{2}$  上单调递增, 因此  $x = 0$  不可能是

$g(x)$  的极大值点. (11分)

综上, 当  $x = 0$  是  $g(x)$  的极大值点时,  $m$  的取值范围为  $0, \frac{1}{2}$ . (12分)



22.【解析】

(1) 当  $P$  为椭圆  $E$  的上顶点时,  $|PF_1| = a$ ,  $\therefore |MF_2| = |PM| = |MF_1| + a$ .

又因为  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ ,  $\therefore |MF_1| = \frac{a}{2}$ ,  $|PM| = |MF_2| = \frac{3a}{2}$ .

$$\text{所以 } \cos \angle MPN = \frac{PM^2 + PF_2^2 - MF_2^2}{2PM \cdot PF_2} = \frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a \cdot a} = \frac{1}{3}$$

$$\text{所以 } \cos \angle MPN = 1 - 2\sin^2 \angle MPO = \frac{1}{3}, \therefore \sin \angle MPO = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(2) 方法一: 设  $P(x_0, y_0)$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,  $\overrightarrow{PF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1M}$ ,  $\overrightarrow{PF_2} = \mu \overrightarrow{F_2N}$ , ( $\lambda, \mu > 0$ )

$$\therefore (-c - x_0, -y_0) = \lambda(x_1 + c, y_1), (c - x_0, -y_0) = \mu(x_2 - c, y_2),$$

$$\therefore x_1 = -\left(\frac{x_0 + c}{\lambda} + c\right), y_1 = -\frac{y_0}{\lambda}.$$

$$\text{又 } \because \text{点 } P \text{ 在椭圆上, 则 } \frac{\left(\frac{x_0 + c}{\lambda} + c\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) + \frac{2c(1 + \lambda)x_0 + c^2(1 + \lambda)^2}{a^2} = \lambda^2, \text{ 又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\therefore 2c(1 + \lambda)x_0 + c^2(1 + \lambda)^2 = (\lambda^2 - 1)a^2 = 3c^2(\lambda^2 - 1),$$

$$\therefore \lambda = \frac{x_0 + 2c}{c}, \text{ 同理 } \mu = \frac{x_0 - 2c}{-c} = \frac{2c - x_0}{c} \text{ (用 } "-c" \text{ 代替 } "c").$$

$$\therefore \lambda + \mu = 1. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}} = \frac{|PF_1| \cdot |PF_2|}{|PM| \cdot |PN|} = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)} = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5} = \frac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$$

$$\text{又 } \lambda + \mu \geq 2\sqrt{\lambda\mu}, \therefore \lambda\mu \leq 1, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{9}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

方法二: 设  $P(x_0, y_0)$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,  $\overrightarrow{PF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1M}$ ,  $\overrightarrow{PF_2} = \mu \overrightarrow{F_2N}$ .

$$\therefore \begin{cases} x_0 + \lambda x_1 = -c(1 + \lambda) \\ y_0 + \lambda y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_0 + \mu x_2 = c(1 + \mu) \\ y_0 + \mu y_2 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x_0^2 + 3y_0^2 = 3b^2 \\ 2x_1^2 + 3y_1^2 = 3b^2 \end{cases}, \text{ 得 } 2x_0^2 + 3y_0^2 - \lambda^2(2x_1^2 + 3y_1^2) = 3b^2(1 - \lambda^2).$$

$$\text{即 } 2(x_0 - \lambda x_1)(x_0 + \lambda x_1) + 3(y_0 - \lambda y_1)(y_0 + \lambda y_1) = 3b^2(1 - \lambda^2),$$

$$\therefore 2(-c - \lambda c)(x_0 - \lambda x_1) = 3b^2(1 - \lambda^2), \text{ 即 } x_0 - \lambda x_1 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda - 1), \text{ 同理 } x_0 - \lambda x_2 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \mu),$$

$$\therefore \lambda x_1 - \mu x_2 = \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \mu) + \frac{3b}{\sqrt{2}}(1 - \lambda) = 3c(2 - \lambda - \mu),$$

$$\text{又 } \because \lambda x_1 - \mu x_2 = -c(1 + \lambda) - c(1 + \mu) = c(-2 - \lambda - \mu),$$

$$\therefore c(-2 - \lambda - \mu) = 3c(2 - \lambda - \mu), \therefore \lambda + \mu = 1, \text{ 以下同解法一.}$$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

### 关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》