机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2021届高三3月教学质量测评

文科数学

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

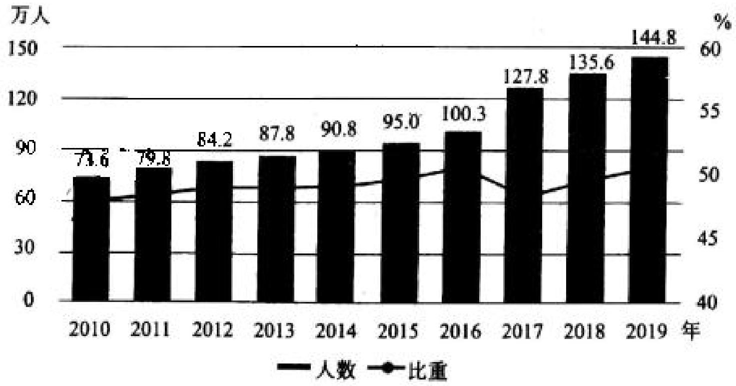
1. 设集合 $A=\{(x,y)|y=2x-3\}$, $B=\{(x,y)|4x-2y+5=0\}$, 则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\left\{\left(\frac{11}{8},\frac{1}{4}\right)\right\}$　　C. $\left\{\left(\frac{1}{8},-\frac{11}{4}\right)\right\}$　　D. $\left\{\left(-\frac{1}{8},-\frac{13}{4}\right)\right\}$

2. 若在复平面内,复数 $\frac{z}{2+3i}$ 所对应的点为 $(3,-4)$, 则 z 的共轭复数为

A. $-18-i$　　B. $-18+i$　　C. $18-i$　　D. $18+i$

3. 根据国家统计局数据显示,我国2010～2019年研究生在校女生人数及所占比重如图所示,则下列说法错误的是



2010～2019年研究生在校女生人数及所占比重

A. 2010～2019年,我国研究生在校女生人数逐渐增加

B. 可以预测2020年,我国研究生在校女生人数将不低于144万

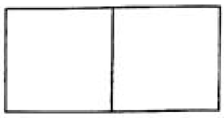
C. 2017年我国研究生在校女生人数少于男生人数

D. 2019年我国研究生在校总人数不超过285万

4. 若 $a=\log_{2021}\frac{1}{67}$，$b=\left(\frac{1}{67}\right)^{2021}$，$c=2021^{\frac{1}{67}}$，则

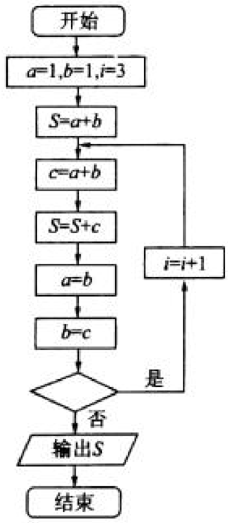
A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

5. 小学数学在“认识图形”这一章节中，一般从生活实物入手，抽象出数学图形，在学生正确认识图形特征的基础上，通过习题帮助学生辨认所学图形；例如在小学数学课本中有这样一个 2×1 的方格表（如图所示），它由 2 个单位小方格组成，其中每个小方格均为正方形；若在这 2×1 方格表的 6 个顶点中任取 2 个顶点，则这 2 个顶点构成的线段长度不超过 $\sqrt{2}$ 的概率为



A. $\frac{13}{15}$　　B. $\frac{11}{15}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 运行如图所示的程序框图，若为了输出第一个大于 50 的 S 的值，则判断框中可以填



A. $b<13$?　　B. $b<21$?

C. $b<33$?　　D. $b<34$?

7. 已知 $\overrightarrow{AB}=(0,2)$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{7}$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4$，则 $\sin\angle BAC=$

A. $\frac{\sqrt{42}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$

C. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

8. 若 $\lambda\sin 170^\circ+\tan 10^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则实数 λ 的值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过双曲线 C 上的一点 M 作两条渐近线的垂线，垂足分别为 A,B，若 $|F_1F_2|^2=16|MA|\cdot|MB|$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_{10}=32$，$S_5=55$，则

A. $a_n=4n-8$　　B. $a_n=2n+12$

C. $S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{17}{2}n$

11. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有且仅有 6 个零点，则实数 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{17}{6},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{17}{6},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{17}{6},\frac{10}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{17}{6},\frac{10}{3}\right)$

12. 已知△ABC 中，$AB=2BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，点 M 在线段 AC 上除 A,C 的位置运动，现沿 BM 进行翻折，使得线段 AB 上存在一点 N，满足 $CN\perp$ 平面 ABM；若 $NB>\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数 x、y 满足 $\begin{cases} x+3\geqslant y, \\ x+y\leqslant 3, \\ x\leqslant 2y, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)=3f(-x)-4e^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

15. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 27，点 E，F 分别是线段 BC，CC_1 的中点，点 G 在四边形 BCC_1B_1 内运动（含边界），若直线 A_1G 与平面 AEF 无交点，则线段 CG 的取值范围为________.

16. 已知点 M 在抛物线 $C:y^2=4x$ 上运动，圆 C' 过点 $(5,0)$，$(2,\sqrt{3})$，$(3,-2)$，过点 M 引直线 l_1，l_2 与圆 C' 相切，切点分别为 P，Q，则 $|PQ|$ 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_3=\frac{1}{4}$，$S_3=\frac{7}{4}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

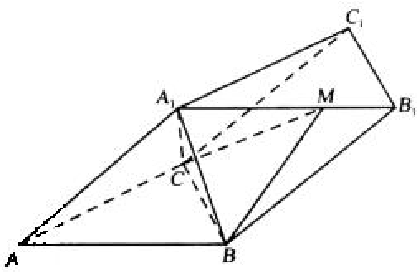
(2) 若 $a_n>0$，求数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 如图所示，其中平面 $ABC\perp$ 平面 CA_1，直线 AA_1 与平面 ABC 所成角为 $30°$，$\angle AA_1C=\angle ACB=90°$，$AC=2BC$，点 M 在线段 A_1B_1 上.

(1) 求证：$AA_1\perp A_1B$；

(2) 若 $BC=2\sqrt{3}$，三棱锥 A_1-BCM 的体积为 6，求 $\frac{A_1M}{MB_1}$ 的值.



19.（12 分）

在某媒体上有这样一句话：买车一时爽，一直养车一直爽，讲的是盲目买车的人最终会成为一个不折不扣的车奴；其实，买车之后的花费主要由加油费、停车费、保险费、保养费、维修费等几部分构成；为了了解新车车主 5 年以来的花费，打破年轻人买车的恐惧感，研究人员作出相关调查，其中表(I)为车主张先生买车以后每年的相关花费，表(II)为对 2016 年 A 地区购买新车的 400 名车主进行跟踪调查，对他们 5 年以来的新车花费的统计.

第 x 年	1	2	3	4	5
花费 y(万元)	0.4	0.7	1	1.4	1.5

表(I)

5年花费(万元)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)	[11,13)	[13,15]
人数	60	100	120	40	60	20

表(II)

(1)通过散点图可知，表(I)中的数据可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

(2)根据表(II)中的数据，求这400名车主5年新车花费的平均数以及方差(同一区间的新车花费用区间的中点值替代).

参考公式：回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

20.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$，点 M 在圆 $O:x^2+y^2=5$ 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 A,B 是圆 O 上异于 M 的两点，且直线 MA、MB 与椭圆 C 相切，求证：A,B 关于原点 O 对称.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=3(x-1)e^x+x^3$.

(1)求函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值；

(2)求证：当 $k\geqslant0$ 时，关于 x 的方程 $f(x)+\frac{3}{2}=3kx^2$ 仅有1个实数解.

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多选，则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

已知平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t^2+\frac{1}{t^2}.\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C' 的极坐标方程为 $\rho^2-16\rho\cos\alpha+32=0$.

(1)求曲线 C 的普通方程以及曲线 C' 的直角坐标方程；

(2)已知过原点的直线 l 与曲线 C 仅有1个交点 M，若 l 与曲线 C' 也仅有1个交点 N，求点 M 的极坐标.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|ax-3|+a|x-2|$ 的图像关于原点对称.

(1)求不等式 $f(x)>x+2$ 的解集；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant mx^2+\frac{9}{4}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2021届高三3月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题考查集合的表示、集合的运算、两直线的位置关系,考查考生逻辑推理的核心素养.

【解析】由于直线 $y=2x-3$ 与直线 $4x-2y+5=0$ 相互平行,故 $A\cap B=\varnothing$,故选 A 项.

2.【答案】C

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的运算,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{z}{2+3i}=3-4i$,则 $z=(3-4i)(2+3i)=6+9i-8i+12=18+i$,则 $\bar{z}=18-i$,故选 C 项.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查数学文化、统计图表、样本的数字特征,考查考生数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】2010~2019 年,我国研究生在校女生人数逐渐增加,故 A 项正确;由于 2010~2019 年,我国研究生在校女生人数逐年增加,且 2019 年人数为 144.8 万,故 B 项正确;2017 年我国研究生在校女生人数所占比重为 48.4%,不足一半,故 C 项正确;因为$\frac{144.8}{0.506}\approx286.166$,故 2019 年我国研究生在校总人数超过 285 万,故 D 项错误.

4.【答案】A

【命题意图】本题考查指对数的大小比较,考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$a=\log_{2021}\frac{1}{67}\in(-\infty,0)$,$b=\left(\frac{1}{67}\right)^{2021}\in(0,1)$,$c=2021^{\frac{1}{67}}\in(1,+\infty)$,故 $a<b<c$,故选 A 项.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率,考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】若从 6 个顶点中任取 2 个,则可以构造出 15 条线段,其中长度超过$\sqrt{2}$的线段有 4 条(其中长度为 2 的有 2 条,长度为$\sqrt{5}$的有 2 条),故所求概率为 $1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$,故选 B 项.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查算法与程序框图,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】运行该程序,$S=2$;第一次,$c=2,S=4,a=1,b=2$;第二次,$c=3,S=7,a=2,b=3$;第三次,$c=5,S=12,a=3,b=5$;第四次,$c=8,S=20,a=5,b=8$;第五次,$c=13,S=33,a=8,b=13$;第六次,$c=21,S=54,a=13,b=21$;故判断框中可以填 $b<21$?,故选 B.

7.【答案】D

【命题意图】本题考查平面向量的加减法、向量的数量积,考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=4$,故 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC=8$,则 $2\times2\sqrt{7}\times\cos\angle BAC=8$,解得 $\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,故 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,故选 D 项.

8.【答案】D

【命题意图】本题考查同角三角函数的基本关系、诱导公式、两角和差的正余弦，考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$\lambda\sin 10^\circ+\dfrac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3}\lambda\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ=\cos 10^\circ$，则$\sqrt{3}\lambda\sin 10^\circ\cos 10^\circ=\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ$，即$\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}\sin 20^\circ=2(\cos 10^\circ\sin 30^\circ-\sin 10^\circ\cos 30^\circ)=2\sin 20^\circ$，故$\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}=2$，则$\lambda=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 D 项.

9.【答案】B

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查考生直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】设$M(m,n)$，则$\dfrac{m^2}{a^2}-\dfrac{n^2}{b^2}=1$，即$b^2m^2-a^2n^2=a^2b^2$，故$|MA|\cdot|MB|=\dfrac{|bm-an|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{|bm+an|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|b^2m^2-a^2n^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}=\dfrac{c^2}{4}$，故$c^4=4a^2b^2$，则$c^4=4a^2(c^2-a^2)$，则$c^4-4a^2c^2+4a^4=0$，即$e^4-4e^2+4=0$，故$e^2=2$，则$e=\sqrt{2}$，故选 B 项.

10.【答案】C

【命题意图】本题考查等差数列的基本运算，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$S_5=5a_3=55$，解得$a_3=11$，$\begin{cases}a_{10}=a_1+9d=32,\\a_3=a_1+2d=11,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=3,\end{cases}$故$a_n=3n+2$，$S_n=\dfrac{(5+3n+2)n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$.

11.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的图像性质，考查考生直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】令$f(x)=0$，即$\omega x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi$，故$x=-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$，可知第 1 个零点为$x_1=-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3\omega}$，而第 6 个零点为$x_6=-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{6\pi}{\omega}=\dfrac{17\pi}{3\omega}$，第 7 个零点为$x_7=-\dfrac{\pi}{3\omega}+\dfrac{7\pi}{\omega}=\dfrac{20\pi}{3\omega}$，故$\dfrac{17\pi}{3\omega}\leqslant 2\pi<\dfrac{20\pi}{3\omega}$，解得$\dfrac{17}{6}\leqslant\omega<\dfrac{10}{3}$，故选 C 项.

12.【答案】A

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

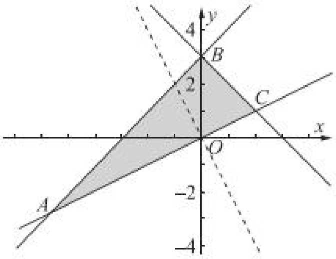
【解析】易知要满足$CN\perp$平面ABM；有两个极限状态，第一是BM为$\angle ABC$的角平分线时，此时$NB=2$，第二是点M与点A重合时，此时$NB=1$；故$NB\in(1,2)$，则实数λ的最大值为 1，故选 A 项.

二、填空题

13.【答案】5

【命题立意】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线$z=2x+y$过点$C(2,1)$时，z有最大值 5.

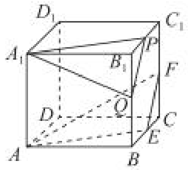


14.【答案】$y=-\dfrac{4}{5}x+4$

【命题立意】本题考查函数的解析式、导数的几何意义，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $2f(x)-3f(-x)+4e^{x}=0$①，故 $3f(x)-2f(-x)-4e^{-x}=0$②，①×2−②×3 得，$f(x)=\frac{8}{5}e^{x}+\frac{12}{5}e^{-x}$，则 $f(0)=4$；而 $f'(x)=\frac{8}{5}e^{x}-\frac{12}{5}e^{-x}$，故 $f'(0)=-\frac{4}{5}$，故所求切线方程为 $y-4=-\frac{4}{5}x$，即 $y=-\frac{4}{5}x+4$.

15.【答案】$\left[\frac{9\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$

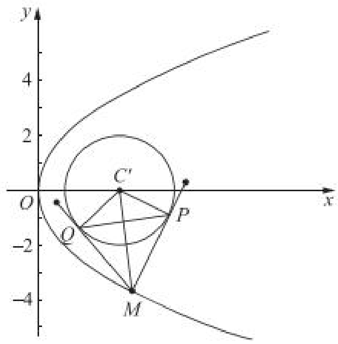


【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$AB=3$；分别取线段 B_1C_1，B_1B 的中点 P，Q，连接 A_1P，A_1Q，PQ，可以证明平面 A_1PQ//平面 AEF，故点 G 在线段 PQ 上运动（含端点位置），故 $CG\in\left[\frac{9\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$.

16.【答案】$[2\sqrt{2},4)$

【命题立意】本题考查抛物线的方程、圆的方程、直线与圆的综合性问题，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.



【解析】设圆 C' 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，将 $(5,0)$，$(2,\sqrt{3})$，$(3,-2)$ 分别代入，可得 $\begin{cases}25+5D+F=0,\\7+2D+\sqrt{3}E+F=0,\\13+3D-2E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-6,\\E=0,\\F=5,\end{cases}$ 即圆 C'：$(x-3)^2+y^2=4$；如图，连接 MC'，$C'P$，$C'Q$，PQ，易得 $C'P\perp MP$，$C'Q\perp MQ$，$MC'\perp PQ$，所以四边形 $MPC'Q$ 的面积为 $\frac{1}{2}|MC'|\cdot|PQ|$；另外四边形 $MPC'Q$ 的面积为 $\triangle MPC'$ 面积的两倍，所以 $\frac{1}{2}|MC'|\cdot|PQ|=|MP|\cdot|C'P|$，故 $|PQ|=\frac{2|MP|\cdot|C'P|}{|MC'|}=\frac{4\sqrt{|C'M|^2-4}}{|C'M|}=4\sqrt{1-\frac{4}{|C'M|^2}}$，故当 $|C'M|$ 最小时，$|PQ|$ 最小，设 $M(x,y)$，则 $|MC'|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2x+9}$，所以当 $x=1$ 时，$|MC'|_{\min}=2\sqrt{2}$，当 x 正无穷大时，$|PQ|$ 趋近圆的直径 4，故 $|PQ|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2},4)$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查等比数列的基本公式、错位相减法，考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1+a_2+a_3=\frac{1}{4q^2}+\frac{1}{4q}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，

即 $6q^2-q-1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{1}{3}$； ……………………………………（2 分）

若 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_n=a_3q^{n-3}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$， ……………………………（4 分）

若 $q=-\frac{1}{3}$，则 $a_n=a_3q^{n-3}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}$； ……………………………………（6 分）

(2)由(1)得，$\frac{n}{a_n}=n\cdot 2^{n-1}$， ……………………………………………………（7 分）

故 $T_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，

$2T_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$， ……………………………………（9 分）

两式相减可得 $-T_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=2^n-1-n\cdot 2^n$，

故 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. ………………………………………………………………………………… (12 分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明：∵平面 $ABC\perp$ 平面 CA_1，平面 $CA_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$BC\perp AC$，$BC\subset$ 平面 ABC，

∴$BC\perp$ 平面 CA_1； ………………………………………………………………………… (1 分)

∵$AA_1\subset$ 平面 CA_1，∴$BC\perp AA_1$； ……………………………………………………… (2 分)

又∵$\angle AA_1C=90^\circ$，$AA_1\perp A_1C$， ……………………………………………………… (3 分)

而 $BC\cap A_1C=C$，∴$AA_1\perp$ 平面 A_1BC； ………………………………………………… (4 分)

又∵$A_1B\subset$ 平面 A_1BC；∴$AA_1\perp A_1B$； ………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)可知，$AA_1\perp$ 平面 A_1BC，$BB_1/\!/AA_1$，∴$BB_1\perp$ 平面 A_1BC； ……………… (6 分)

易知 AA_1 在底面 ABC 上的射影就是 AC，所以 $\angle A_1AC$ 就是直线 AA_1 与底面 ABC 所成的角，且 $\angle A_1AC=30^\circ$， ……………………………………………………………………… (7 分)

∵$AC=4\sqrt{3}$，∴$A_1A=6$，$BB_1=6$，$A_1C=2\sqrt{3}$，

则 $S_{A_1BC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6$； ……………………………………………… (9 分)

设点 M 到平面 A_1BC 的距离等于 h，

则 $V_{A_1-BCM}=V_{M-A_1BC}=\dfrac{1}{3}\times 6\times h=6$，∴$h=3$， ……………………………… (10 分)

所以 $h=\dfrac{1}{2}BB_1$，所以点 M 是棱 A_1B_1 的中点，从而 $\dfrac{A_1M}{MB_1}=1$ 为所求. ………………… (12 分)

19.【命题意图】本题考查样本的数字特征、回归直线的方程，考查考生逻辑推理、数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\dfrac{0.4+0.7+1+1.4+1.5}{5}=1$，

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-0.6)+(-1)\times(-0.3)+1\times 0.4+2\times 0.5=2.9,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=4+1+1+4=10，故\ \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=0.29,$$

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=1-0.29\times 3=0.13$，故所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.29x+0.13$； ……………… (6 分)

(2)依题意，新车花费：

5 年花费(万元)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)	[11,13)	[13,15]
人数	60	100	120	40	60	20
频率	0.15	0.25	0.3	0.1	0.15	0.05

依题意，$\bar{x}=4\times 0.15+6\times 0.25+8\times 0.3+10\times 0.1+12\times 0.15+14\times 0.05=8$， ………………… (9 分)

$s^2=0.15\times(-4)^2+0.25\times(-2)^2+0.1\times 2^2+0.15\times 4^2+0.05\times 6^2=8$. ……………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\begin{cases}\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{15}{16b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ ……………………………………………………………… (2 分)

解得$\begin{cases}a^2=4,\\b^2=1,\end{cases}$故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；……………………………………………（4 分）

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，点 $M(x_0,y_0)$在圆 $x^2+y^2=5$ 上运动；

当过点 M 且与椭圆 C 相切的直线斜率存在时，设切线的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$；……………（5 分）

由$\begin{cases}y=k(x-x_0)+y_0,\\x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$消去 y 得$(1+4k^2)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$，

则 $\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+4k^2)[4(y_0-kx_0)^2-4]=0$，

整理得$(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$，……………………………………………（7 分）

设直线 MA，MB 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $k_1k_2=\frac{1-y_0^2}{4-x_0^2}$，

故 $k_1k_2=-1$，即 AB 为圆 $x^2+y^2=5$ 的直径，故此时 A，B 关于原点 O 对称；……………（10 分）

当直线 MA 的斜率不存在时，直线 MA 的方程为 $x=2$ 或 $x=-2$，

当直线 MA 的方程为 $x=2$ 时，不妨设 $M(2,1)$，则 $A(2,-1)$，$B(-2,1)$，此时 A，B 关于原点 O 对称；当直线 MA 的方程为 $x=-2$ 时，不妨设 $M(-2,1)$，则 $A(-2,-1)$，$B(2,1)$，此时 A，B 关于原点 O 对称；

同理可得，当直线 MB 的斜率不存在时，A，B 关于原点 O 对称；

综上所述，A，B 关于原点 O 对称.……………………………………………（12 分）

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=3xe^x+3x^2=3x(e^x+x)$；……………………………………（1 分）

令 $m(x)=e^x+x$，则 $m'(x)=e^x+1>0$，

故 $m(x)$在$[0,2]$上单调递增，故 $m(x)\geqslant m(0)=1$；……………………………………（3 分）

故 $f'(x)\geqslant 0$，即函数 $f(x)$在$[0,2]$上单调递增，……………………………………（4 分）

故函数 $f(x)$在$[0,2]$上的最小值为 $f(0)=-3$，最大值为 $f(2)=3e^2+8$；……………………（5 分）

(2)依题意，$3(x-1)e^x+x^3+\frac{3}{2}=3kx^2$，则$(x-1)e^x+\frac{1}{3}x^3-kx^2+\frac{1}{2}=0$，

令 $g(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{3}x^3-kx^2+\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=xe^x+x^2-2kx=x(e^x+x-2k)$；

当 $k=\frac{1}{2}$时，$g'(x)=xe^x+x^2-x=x(e^x+x-1)\geqslant 0$，

故函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

因为 $g(0)=-1+\frac{1}{2}<0$，$g(1)=\frac{1}{3}>0$，故 $k=\frac{1}{2}$时，$f(x)$恰有 1 个零点；…………………（6 分）

当 $k>\frac{1}{2}$时，令 $h(x)=e^x+x-2k$，则 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

因为 $h(0)=1-2k<0$，$h(k)=e^k-k>k-k=0$，

故存在唯一实数 $x_1\in(0,k)$，使得 $h(x_1)=0$，即 $g'(x_1)=0$，

故 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,x_1)$上单调递减，在$(x_1,+\infty)$上单调递增，

因为 $g(x_1)<g(0)=-1+\frac{1}{2}<0$，

$g(3k)=(3k-1)e^{3k}+\frac{1}{3}\cdot(3k)^3-k\cdot(3k)^2+\frac{1}{2}=(3k-1)e^{3k}+\frac{1}{2}>0$，

故当 $k>\frac{1}{2}$时，函数 $g(x)$恰有 1 个零点；……………………………………（8 分）

当 $0\leqslant k<\frac{1}{2}$时，$h(x)=e^x+x-2k$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

因为 $h(0)=1-2k>0, h(-1)=\frac{1}{e}-1-2k<0$,

所以存在唯一实数 $x_2\in(-1,0)$,使得 $h(x_2)=0$,即 $g'(x_2)=0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_2)$ 上单调递增,在 $(x_2,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

因为 $g(0)=-1+\frac{1}{2}<0, g(1)=\frac{1}{3}-k+\frac{1}{2}>0$,

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,函数 $g(x)$ 只有 1 个零点, ……………………………………………………… (9 分)

当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $[g(x)]_{\max}=g(x_2)=(x_2-1)e^{x_2}+\frac{1}{3}x_2^3-kx_2^2+\frac{1}{2}$,

由 $g'(x_2)=0$ 得 $k=\frac{e^{x_2}+x_2}{2}$,

故 $g(x_2)=(x_2-1)e^{x_2}+\frac{1}{3}x_2^3-kx_2^2+\frac{1}{2}=(x_2-1)e^{x_2}+\frac{1}{3}x_2^3-\frac{e^{x_2}+x_2}{2}\cdot x_2^2+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left[(x_2^2-2x_2+2)e^{x_2}+\frac{1}{3}x_2^3-1\right]$; …………………………………………………… (10 分)

令 $t(x)=(x^2-2x+2)e^x+\frac{1}{3}x^3-1, x\in(-1,0)$;

因为 $t'(x)=x^2(e^x+1)>0$,故 $t(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增;

因为 $t(x)>t(-1)=\frac{5}{e}-\frac{1}{3}-1=\frac{5}{e}-\frac{4}{3}>0$,故 $g(x_2)<0$,

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时,函数 $f(x)$ 无零点;

故当 $0\leqslant k<\frac{1}{2}$ 时,函数 $g(x)$ 恰有 1 个零点.

综上所述,当 $k\geqslant 0$ 时,关于 x 的方程 $f(x)+\frac{3}{2}=3kx^2$ 仅有 1 个实数解. ………………………… (12 分)

22.【解析】(1)易知 $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$ 或 $t+\frac{1}{t}\leqslant -2$,当且仅当 $t=\pm 1$ 时等号成立;

而曲线 C: $\begin{cases} x=t+\frac{1}{t}, \\ y=t^2+\frac{1}{t^2}, \end{cases}$ 故曲线 C 的普通方程 $y=x^2-2(x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2)$; ……………………………… (3 分)

而曲线 C': $\rho^2-16\rho\cos\alpha+32=0$,

故曲线 C' 的直角坐标方程 $x^2+y^2-16x+32=0$; …………………………………………………………… (5 分)

(2)易知直线 l 的斜率存在,设直线 l: $kx-y=0$;

而圆 C': $(x-8)^2+y^2=32$,故 $\frac{|8k|}{\sqrt{1+k^2}}=4\sqrt{2}$,解得 $k=\pm 1$; ………………………………………… (7 分)

联立 $\begin{cases} y=\pm x, \\ y=x^2-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2, \\ y=2, \end{cases}$ …………………………………………………………… (9 分)

故点 M 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$. …………………………………………………………… (10 分)

注:极坐标不唯一,正确的均给分.

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意,函数 $f(x)$ 为奇函数,故 $f(0)=3+2a=0$,解得 $a=-\frac{3}{2}$;

故 $f(x)>x+2$ 等价于 $\left|\frac{3}{2}x+3\right|-\left|\frac{3}{2}x-3\right|>x+2(*)$；…………………………………… (1 分)

当 $x<-2$ 时，$(*)$式化为 $-\frac{3}{2}x-3+\frac{3}{2}x-3>x+2$，解得 $x<-8$，故 $x<-8$； …………………… (2 分)

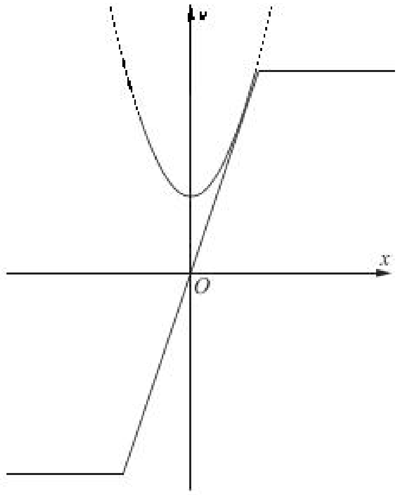
当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$(*)$式化为 $\frac{3}{2}x+3+\frac{3}{2}x-3>x+2$，解得 $x>1$，故 $1<x\leqslant 2$； …………………… (3 分)

当 $x>2$ 时，$(*)$式化为 $\frac{3}{2}x+3-\frac{3}{2}x+3>x+2$，解得 $x<4$，故 $2<x<4$；…………………………… (4 分)

故不等式的解集为 $\{x|x<-8$ 或 $1<x<4\}$；……………………………………………………………… (5 分)

(2)作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示；因为 $y=mx^2+\frac{9}{4}$ 的图像过定点 $\left(0,\frac{9}{4}\right)$，故 $m\leqslant 0$ 不合题意，舍去；

……………………………………………………………………………………………………… (7 分)



当 $m>0$ 时，临界状态为 $y=mx^2+\frac{9}{4}$ 与直线 $y=3x$ 相切(如图)； ……………………………………… (8 分)

联立 $\begin{cases} y=mx^2+\frac{9}{4}, \\ y=3x, \end{cases}$ 故 $mx^2-3x+\frac{9}{4}=0$，解得 $\Delta=9-1\times\frac{9}{1}m=0$，故 $m=1$，

故实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$． ………………………………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》