

2024 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)

数学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \mid x^2 + x - 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$
 C. $\{x \mid -1 < x < 3\}$ D. $\{x \mid 1 < x < 3\}$
- 已知 $f(x) = e^x + \sin x$, 则 $f'(0) =$ ()
 A. 1 B. -1 C. 2 D. 0
- 命题 $p: \forall x > y > 0$, 都有 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, 则 ()
 A. p 是假命题, $\neg p: \forall x > y > 0, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ B. p 是真命题, $\neg p: \exists x > y > 0, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$
 C. p 是假命题, $\neg p: \exists x > y > 0, \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ D. p 是真命题, $\neg p: \forall 0 < x < y, \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$
- 已知函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi + x)$, 则 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A, b^2 + c^2 = 2bc$, 则 $\cos A =$ ()
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 将函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $y = \sin \omega x$ 的图象, 则正实数 ω 的最小值为 ()
 A. $\frac{21}{4}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $\frac{9}{4}$ D. 2

7. 某化工厂生产过程中产生的废气含有大量的有毒、有害物质,需经过滤后排放.过滤过程中废气中的有毒、有害物质的含量 P (单位:mg/L)与时间 t (单位:h)间的关系为 $P=P_0e^{-kt}$ (P_0, k 为常数),若在过滤 2 h 后消除了 20% 的有毒、有害物质,则 5 h 后剩余的有毒、有害物质大约为原来有毒、有害物质的 ()

(附: $0.8^{2.5} \approx 0.57, 0.8^{2.2} \approx 0.61, 0.8^{0.4} \approx 0.91$)

- A. 50% B. 57% C. 61% D. 91%

8. 已知正实数 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = 1$, 则 $\frac{3x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2}$ 的最小值为 ()

- A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. 6 D. 7

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的有 ()

- A. “ $x > 2$ ”是“ $x > 3$ ”的充分不必要条件
B. “ $x > y$ ”是“ $x^3 > y^3$ ”的充要条件
C. “ $x > y$ ”是“ $x^2 > y^2$ ”的既不充分也不必要条件
D. “ $x > y$ ”是“ $2^x > 2^y$ ”的必要不充分条件

10. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 下列选项正确的有 ()

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\sin(\alpha + \beta) = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ D. $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{11\sqrt{5}}{25}$

11. 关于函数 $f(x) = |\cos x| + \frac{1}{\cos|x|}$, 下列说法正确的有 ()

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
B. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递增
C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
D. 方程 $f(x) = 2$ 有无穷多个解

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, $f'(x)$ 是 \mathbf{R} 上的导函数, 若 $f(2+x) = 4 - f(-x)$, $2f'(1) = 2f(0) = f(1)$, 则下列选项正确的有 ()

- A. $f(-1) = 2f'(1)$ B. $\sum_{i=1}^4 f(i) = \sum_{i=1}^4 f'(i)$
C. $\sum_{i=1}^{50} f(i) = 101$ D. $\sum_{i=1}^{50} f'(i) = 25$

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{2x}{x-2} \leq 1 \right\}$, $B = \{ x \mid \log_2 x < a \}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = 3, \cos A = \frac{2}{3}$, 则当 C 有唯一解时, a 的取值范围是 _____.

15. 已知 $0 < x_1 < x_2 < 2\pi$, $\sin x_1 = \sin x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos(x_1 - x_2) =$ _____.

16. 已知不等式 $x^2 - ax + e^{-x} + x \ln x \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

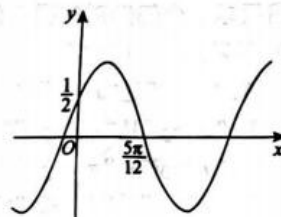
四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + 2\cos^2 x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 求 $g(x)$ 的最小值及取得最小值时相应的 x 值.



18. (12 分)

已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $g(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x) + g(x) = e^{-x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式;

(2) 关于 x 的不等式 $2g(x) + a(e^{-x} - 1) \geq 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = 1 - x + a \ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = \log_2 e$, 证明: 当 $0 < x \leq 2$ 时, $(x-1)f(x) \geq 0$.

20. (12分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin B + \sin C}$.

(1)求 B ;

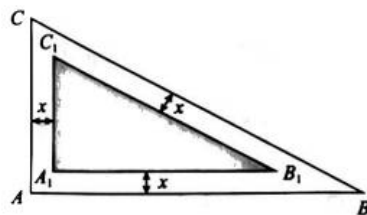
(2)已知 BD 为 AC 边上的中线, $\cos C = \frac{\sqrt{13}}{13}$, $BD = \frac{\sqrt{37}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12分)

如图,某社区有一个直角三角形空地 ABC ,其中 $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, $AC = 20$ m, 现对其进行规划,要求中间为三角形绿地公园(如图阴影部分 $Rt\triangle A_1B_1C_1$),周边是宽度均为 x m的公园健步道.

(1)当 $x = 1$ 时,求 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 l ;

(2)若在设计健步道时,要保证绿地公园的面积不小于总面积的 $\frac{3}{4}$,求健步道宽度的最大值.



22. (12分)

已知 $f(x) = e^x - 2\ln x$, $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ ($x > 0$).

(1)证明: $g(x) > 0$;

(2)若对 $\forall x > 0$, $f(x) \geq 2\ln \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - \cos|ax|$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

