

陕西师大附中 2022-2023 学年度高三年级第十一次模考

数学（理科） 试题

注意事项：

1. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分. 答案均写在答题纸上, 满分150分, 时间120分钟.
2. 答卷前将答题卡上的姓名、班级、考场填写清楚, 并检查条形码是否完整、信息是否准确.
3. 答卷必须使用0.5mm的黑色签字笔书写, 字迹工整、笔迹清晰. 并且必须在题号所指示的答题区内作答, 超出答题区域的书写无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{x | \ln(x-1) < 0\}$, $B = \{y | y = 2^x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cup B = ()$
A. $(1, 3)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-1, +\infty)$
2. 如果一个复数的实部和虚部相等, 则称这个复数为“等部复数”, 若复数 $z = \frac{i}{1-ai}$ (i 为虚数单位) 为“等部复数”, 则实数 a 的值为 $()$
A. -3 B. -1 C. 0 D. 1
3. 若圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$, 侧面展开图的面积为 6π , 则该圆锥的体积是 $()$
A. $\sqrt{3}\pi$ B. 9π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 3π
4. 我市拟向新疆哈密地区的三所中学派出 5 名教师支教, 要求每所中学至少派遣一名教师, 则不同的派出方法有 $()$
A. 300 种 B. 150 种 C. 120 种 D. 90 种
5. 若 $(x-2)^4(x^2+3x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \dots + a_n(x-2)^n$, 则 $\frac{a_5+a_6}{a_4} = ()$
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
6. 在如今这个 5G 时代, 6G 研究已方兴未艾. 2021 年 8 月 30 日第九届未来信息通信技术国际研讨会在北京举办. 会上传出消息, 未来 6G 速率有望达到 1Tbps, 并启用毫米波、太赫兹、可见光等尖端科技, 有望打造出空天地融合的立体网络, 预计 6G 数据传输速率有望比 5G 快 100 倍, 时延达到亚毫秒级水平. 香农公式 $C = W \log_2(1 + \frac{S}{N})$ 是被广泛公认的通信理论基础和研究依据, 它表示: 在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递率 C 取决于信道带宽 W 、信道内信号的平均功率 S , 信道内部的高斯噪声功率 N 的大小, 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 若不改变带宽 W , 而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 11 提升至 499, 则最大信息传递率 C 会提升到原来的 $()$ (参考数据: $\log_2 3 = 1.58, \log_2 5 = 2.32$)
A. 2.7 倍 B. 2.6 倍 C. 2.5 倍 D. 2.4 倍

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线交 C 于 A, B 两点, 若线段 AB 中点的纵坐标为 $2\sqrt{3}$, 则 p 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4

8. 已知函数 $f(x) = \cos(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{4}) + 1$, 若将 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $m (m > 0)$ 个单位长度后图像关于 y 轴对称, 则实数 m 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{10}$ B. $\frac{3\pi}{10}$ C. $\frac{7\pi}{10}$ D. $\frac{11\pi}{10}$

9. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{2-x}{3+x}$, $a = \log_2 3$, $b = \log_3 4$, $c = \frac{3}{2}$, 则 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$
C. $f(c) < f(a) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线

与该双曲线的左支交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16, 则当 b^2 取得最大值时, 该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, $f(x)$ 为偶函数且 $f(x) + f(x+2) = 3$, $g(x) + g(10-x) = 2$,

则 $\sum_{i=1}^9 [f(i) + g(i)] =$ ()

- A. 21 B. 22 C. $\frac{45}{2}$ D. $\frac{47}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \ln x + 1 - mx^2$ 有两个零点 a, b , 且存在唯一的整数 $x_0 \in [a, b]$, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{e}{2})$ B. $[\frac{\ln 3e}{9}, \frac{e}{2})$ C. $[\frac{\ln 2e}{4}, 1)$ D. $(\frac{\ln 2e}{4}, 1]$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在答题纸中相应的横线上。）

13. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，若 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ ，则 $\sin \alpha =$ _____.

14. 已知点 M 在直线 BC 上，点 A 在直线 BC 外，若 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ，且 $|\overrightarrow{AB}| = 4$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 2$ ，则 $|\overrightarrow{AM}|$ 的最小值为_____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_n = \log_{n+1}(n+2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 定义：使数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项的积为整数的数 k ($k \in \mathbb{N}^*$) 叫做期盼数，则区间 $[1, 2023]$ 内的所有期盼数的和等于_____.

16. 已知正四面体 $P-ABC$ 内接于球， D 为棱 AB 上点，满足 $AD = 3DB$. 若存在过 D 点且面积为 3π 的截面圆，则正四面体棱长的取值范围为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积记为 T_n ，且满足 $\frac{1}{T_n} = \frac{a_n - 1}{2a_n}$.

(1) 证明：数列 $\{T_n\}$ 为等差数列；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{T_n T_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分) 强基计划校考由试点高校自主命题，校考过程中通过笔试后才能进入面试环节. 已知甲、乙两所大学的笔试环节都没有三门考试科目且每门科目是否通过相互独立，若某考生报考甲大学，每门科目通过的概率均为 $\frac{1}{2}$ ；该考生报考乙大学，每门科目通过的概率依次为 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, m$ ，其中 $0 < m < 1$.

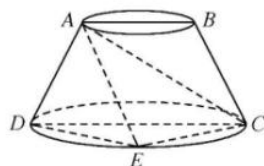
(1) 若 $m = \frac{2}{3}$ ，分别求出该考生报考甲、乙两所大学在笔试环节恰好通过一门科目的概率；

(2) 强基计划规定每名考生只能报考一所试点高校，若以笔试过程中通过科目数的数学期望为依据作决策，当该考生更希望通过乙大学的笔试时，求 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分) 如图， AB, CD 分别是圆台上、下底面的直径，且 $AB \parallel CD$ ，点 E (异于 D, C 两点) 是下底面圆周上一点， $AB = 2\sqrt{2}$ ，圆台的高为 $\sqrt{14}$.

(1) 证明：不存在点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE ；

(2) 若 $DE = CE = 4$ ，求二面角 $D-AE-B$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为点 A, B , 且 $|AB| = 4$, 椭圆 C 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 过椭圆 C 的右焦点, 且斜率不为 0 的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点, 直线 AM, BN 的交于点 Q , 求证: 点 Q 在直线 $x = 4$ 上.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - x + 2a^2\ln x (a \neq 0)$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

请考生在第 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 并请考生务必将答题卡中所选试题的题号进行涂写.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程.

如图是以等边 $\triangle OAB$ 的每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段弧, 三段弧围成的曲边三角形, 记为勒洛 $\triangle OAB$ (勒洛三角形是德国机械工程专家, 机械运动学家勒洛首先发现的, 故命名为勒洛三角形). 在平面直角坐标系 AOY 中, 以坐标原点 O 为极点, 以 X 轴非负半轴为极轴, 取相同的单位长度建立极坐标系 (规定: 极径 $\rho \geq 0$, 极角 $\theta \in [-\pi, \pi]$),

已知 A, B 两点的极坐标分别为 $A\left(2, -\frac{\pi}{6}\right), B\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$.

- (1) 求 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{OB}$ 的极坐标方程;
- (2) 已知 M 点的极坐标 $M\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right)$, Q 是 $\widehat{AB}$ 上的动点, 求 $|MQ|^2$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲.

已知 $f(x) = |x - a| + |x + 3a - 2|$, $g(x) = -x^2 + 2ax + 1 (a \in \mathbf{R})$

- (1) 当 $a = 2$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 7$;
- (2) 若对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 求 a 的取值范围.

陕西师大附中 2022-2023 学年度高三年级第十一次模考

数学（理科） 试题参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	B	D	C	C	B	B	A	C	D

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在答题纸中相应的横线上。）

13. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 14. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 15. 2026 16. $[2\sqrt{2}, 4]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 【详解】(1) 当 $n \geq 2$ 时， $\frac{1}{T_n} = \frac{a_n - 1}{2a_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a_n} = \frac{1}{2} - \frac{T_{n-1}}{2T_n}$ ， $\therefore 1 = \frac{T_n}{2} - \frac{T_{n-1}}{2}$ ，即 $T_n - T_{n-1} = 2$ ，

又当 $n=1$ 时， $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - 1}{2a_1}$ ，得 $T_1 = a_1 = 3$ ， $\therefore$ 数列 $\{T_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列；

(2) 由 (1) 得 $T_n = 2n + 1$ ，则 $b_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$ ，

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{3(2n+3)}$$

18. 【详解】(1) 设该考生报考甲大学恰好通过一门笔试科目为事件 A，该考生报考乙大学恰好通过一门笔试科目为事件 B，

根据题意可得 $P(A) = C_3^1 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$ ， $P(B) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}$ 。

(2) 设该考生报考甲大学通过的科目数为 X，报考乙大学通过的科目数为 Y，

根据题意可知， $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ， $P(Y=0) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} (1-m) = \frac{5}{18} (1-m)$ ，

$$P(Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} (1-m) + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} (1-m) + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} m = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} m$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} (1-m) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} m + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} m = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} m$$

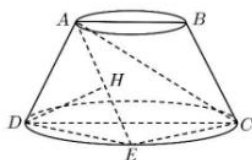
则随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{5}{18} (1-m)$	$\frac{11}{18} - \frac{1}{3} m$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} m$	$\frac{1}{9} m$

$$E(Y) = \frac{11}{18} - \frac{1}{3}m + \frac{2}{9} + m + \frac{1}{3}m = \frac{5}{6} + m,$$

若 $E(Y) > E(X)$, 则 $\frac{5}{6} + m > \frac{3}{2}$, 故 $\frac{2}{3} < m < 1$, 即 m 的取值范围是 $(\frac{2}{3}, 1)$.

19. 【详解】(1) 假设存在这样的点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE , CD 是底面直径, 故 $EC \perp DE$, 作 $DH \perp AE$, 垂足为 H , 由于平面 $AEC \perp$ 平面 ADE , 平面 $AEC \cap$ 平面 $ADE = AE$, $DH \subset$ 平面 ADE , 根据面面垂直的性质定理, $DH \perp$ 平面 AEC , 又 $EC \subset$ 平面 AEC , 故 $DH \perp EC$, 又 $DH \cap DE = D$, $DH, DE \subset$ 平面 ADE , 故 $EC \perp$ 平面 ADE , 故 $EC \perp AE$, 同理可证 $ED \perp AE$, 又 $DE \cap CE = E$, $DE, CE \subset$ 平面 CDE 于是 $AE \perp$ 平面 CDE , 又圆台上下底面圆心连线垂直于底面, 但显然上下底的圆心连线不和 AE 平行, 于是假设矛盾, 故不存在点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE .



(2) 过 B 作 $BF \perp CD$, 垂足为 F , 下以 F 为原点, FB, FD 为 x, z 轴, 过 F 垂直于 BD 且落在底面的射线为 y 轴, 建立空间直角坐标系, 列出各点坐标 $D(3\sqrt{2}, 0, 0), A(2\sqrt{2}, 0, \sqrt{14}), E(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), B(0, 0, \sqrt{14})$.

$\overrightarrow{AE} = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{14}), \overrightarrow{DE} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, 设平面 ADE 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

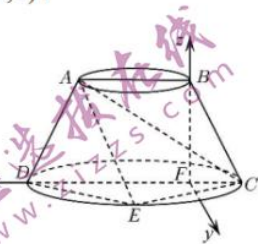
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - \sqrt{14}z = 0 \\ -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases}, \text{ 不妨取 } \vec{n} = (\sqrt{7}, \sqrt{7}, 1);$$

$\overrightarrow{AE} = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{14}), \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$, 设平面 ABE 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} -\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b - \sqrt{14}c = 0 \\ -2\sqrt{2}a = 0 \end{cases}, \text{ 不妨取 } \vec{m} = (0, \sqrt{7}, 2).$$

于是法向量 $\vec{m}, \vec{n}$ 的夹角为 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{9}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{165}}{55}$.

由图所示二面角的大小是钝角, 故二面角大小的余弦值是 $-\frac{3\sqrt{165}}{55}$.

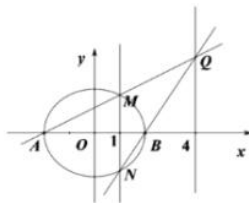


20. 【详解】(1) 因为 $|AB| = 4$, 椭圆 C 离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\begin{cases} 2a = 4 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$.

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ①若直线 l 的斜率不存在时, 如图, 因为椭圆 C 的右焦点为 $(1, 0)$, 所以直线 l 的方程是 $x = 1$. 所以点 M 的坐标是 $(1, \frac{3}{2})$, 点 N 的坐标是 $(1, -\frac{3}{2})$.

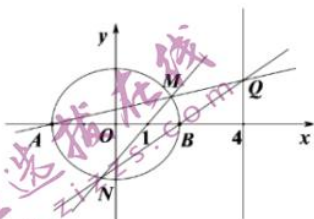
所以直线 AM 的方程是 $y = \frac{1}{2}(x+2)$, 直线 BN 的方程是 $y = \frac{3}{2}(x-2)$.



所以直线 AM , BN 的交点 Q 的坐标是 $(4, 3)$. 所以点 Q 在直线 $x=4$ 上.

②若直线 l 的斜率存在时, 如图.

设斜率为 k . 所以直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$. 联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$



消去 y , 整理得 $(3+4k^2)x - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$. 显然 $\Delta > 0$. 不妨设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$. 所以直线 AM 的方程是 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x+2)$.

令 $x=4$, 得 $y = \frac{6y_1}{x_1 + 2}$. 直线 BN 的方程是 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x-2)$.

令 $x=4$, 得 $y = \frac{2y_2}{x_2 - 2}$. 所以 $\frac{6y_1}{x_1 + 2} = \frac{2y_2}{x_2 - 2} = \frac{6k(x_1 - 1)}{x_1 + 2} = \frac{2k(x_2 - 1)}{x_2 - 2} = \frac{6k(x_1 - 1)(x_2 - 2) - 2k(x_1 + 2)(x_2 - 1)}{(x_1 + 2)(x_2 - 2)}$

分子

$$= 6k(x_1 - 1)(x_2 - 2) - 2k(x_1 + 2)(x_2 - 1) = 2k[3(x_1x_2 - x_2 - 2x_1 + 2) - (x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 2)]$$

$$= 2k\left[2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8\right] = 2k\left[\frac{2(4k^2 - 12)}{3+4k^2} - \frac{5 \times 8k^2}{3+4k^2} + 8\right] = 2k\left(\frac{8k^2 - 24 - 40k^2 + 24 + 32k^2}{3+4k^2}\right) = 0.$$

所以点 Q 在直线 $x=4$ 上.

21. 【详解】(1) $f'(x) = ax - 1 + \frac{2a^2}{x} = \frac{ax^2 - x + 2a^2}{x}$, 设 $p(x) = ax^2 - x + 2a^2$, ($x > 0$), $\Delta = 1 - 8a^3$,

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $\Delta \leq 0$, $p(x) \geq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\Delta > 0$, $p(x)$

的零点为 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}$, 且 $0 < x_1 < x_2$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < x_1$, 或 $x > x_2$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x_1 < x < x_2$, $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a^3}}{2a})$ 上单调递减, 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a})$,

$(\frac{1 + \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}, +\infty)$ 单调递增. 当 $a \leq 0$ 时, $\Delta > 0$, $p(x)$ 的零点为 $\frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a^3}}{2a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 证明: 由 (1) 知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 存在两个极值点, 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{1}{a}$,

要证: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, 只要证 $f(x_1)-f(x_2) > \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$,

只需要证 $\frac{1}{2}(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)-2] + 2a^2 \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}$, 即证 $2a^2 \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > \frac{1}{2}(x_1-x_2)$, 设 $t = \frac{x_1}{x_2}$,

$(0 < t < 1)$, 设函数 $g(t) = 2a^2 \ln t - t + \frac{1}{t}$, $\therefore g'(t) = -\frac{t^2 - 2a^2t + 1}{t^2}$,

$\therefore \Delta = 4a^4 - 4 < 0$, $\therefore t^2 - 2a^2t + 1 > 0$, $\therefore g'(t) < 0$, $\therefore g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减; 则 $g(t) > g(1) = 0$

又 $\frac{1}{2}(x_1-x_2) < 0$, 则 $g(t) > 0 > \frac{1}{2}(x_1-x_2)$, 则 $2a^2 \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > \frac{1}{2}(x_1-x_2)$,

从而 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

22. 【详解】(1) 因为 $\widehat{AB}$ 所在圆的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$,

所以 $\widehat{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho = 2, \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$;

因为 $A\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$ 的直角坐标是 $(\sqrt{3}, -1)$, 所以 $\widehat{OB}$ 的所在的圆的直角坐标方程 $(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2 = 4$,

所以 $\widehat{OB}$ 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right), \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

(2) 解: 因为 Q 是 $\widehat{AB}$ 上的动点, 所以设 $Q(\rho, \theta) = (2, \theta), \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

在 $\triangle OMQ$ 中, 由余弦定理得 $MQ^2 = OQ^2 + OM^2 - 2OQ \cdot OM \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right)$

$= 4 + 2 - 4\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right) = 6 - 4\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right)$, 由 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 得 $\frac{\pi}{12} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$,

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{12} - \theta\right) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 故 $|MQ|^2 \in [6 - 4\sqrt{2}, 2]$.

23. 【详解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = |x-2| + |x+4|$ 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x-2+x+4 = 2x+2 \geq 7, \therefore x \geq \frac{5}{2}$

当 $-4 \leq x < 2$ 时, $f(x) = 6 \geq 7$, 无解. 当 $x < -4$ 时, $f(x) = 2-x-x-4 = -2x-2 \geq 7, \therefore x \leq -\frac{9}{2}$ 综

上不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{5}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{9}{2}\right\}$.

(2) 由已知 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ $\therefore f(x) = |x-a| + |x+3a-2| \geq |(x-a)-(x+3a-2)| = |4a-2|$,

$\therefore f(x)_{\min} = |4a-2| > g(x)_{\max} = g(a) = a^2 + 1 \therefore |4a-2| > a^2 + 1$ 等价于 $4a-2 > a^2 + 1$ 或 $4a-2 < -a^2 - 1$,

解得 $1 < a < 3$ 或 $-2 - \sqrt{5} < a < -2 + \sqrt{5}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线