

绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共 5 页, 23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

★祝考试顺利★

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答: 先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内, 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

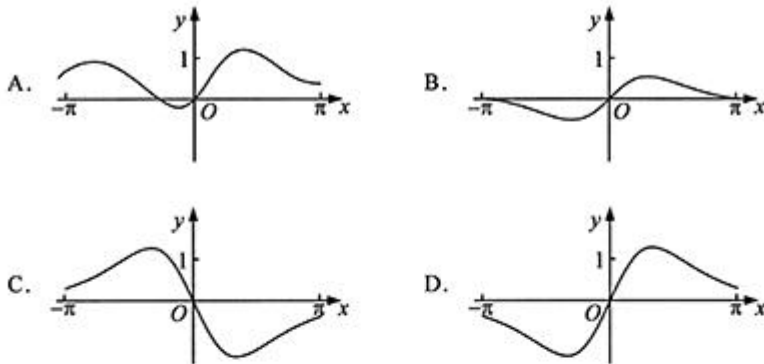
一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$
 - A. $\{x | -4 < x < 3\}$
 - B. $\{x | -4 < x < -2\}$
 - C. $\{x | -2 < x < 2\}$
 - D. $\{x | 2 < x < 3\}$
2. 设复数 z 满足 $|z - i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则
 - A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$
 - B. $(x-1)^2 + y^2 = 1$
 - C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$
 - D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$
3. 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则
 - A. $a < b < c$
 - B. $a < c < b$
 - C. $c < a < b$
 - D. $b < c < a$
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此。此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是
 - A. 165 cm
 - B. 175 cm
 - C. 185 cm
 - D. 190 cm



理科数学试题 第 1 页 (共 5 页)

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“--”, 右图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是



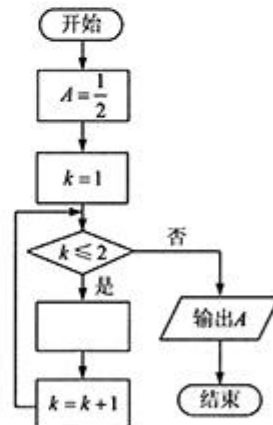
- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{21}{32}$ D. $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, 且 $(a-b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入

- A. $A = \frac{1}{2+A}$
B. $A = 2 + \frac{1}{A}$
C. $A = \frac{1}{1+2A}$
D. $A = 1 + \frac{1}{2A}$



9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4 = 0$, $a_5 = 5$, 则

- A. $a_n = 2n - 5$ B. $a_n = 3n - 10$ C. $S_n = 2n^2 - 8n$ D. $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A , B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为
- A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$
11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:
- ① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增
- ③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为 2
- 其中所有正确结论的编号是
- A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③
12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为
- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.
14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$ _____.
15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4:1 获胜的概率是_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$.

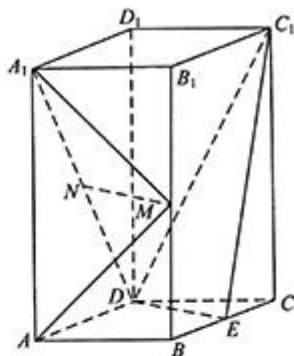
- (1) 求 A ;
- (2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

理科数学试题 第 3 页 (共 5 页)

18. (12分)

如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

- (1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求 l 的方程;
- (2) 若 $\overline{AP}=3\overline{PB}$, 求 $|AB|$.

20. (12分)

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

- (1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;
- (2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. (12分)

为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i=0,1,\dots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0, p_8=1, p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1} (i=1,2,\dots,7)$, 其中 $a=P(X=-1), b=P(X=0), c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5, \beta=0.8$.

- (i) 证明: $\{p_{i+1}-p_i\} (i=0,1,2,\dots,7)$ 为等比数列;
- (ii) 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

理科数学试题 第 4 页 (共 5 页)

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$.

- (1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
- (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$;
- (2) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$.

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注