

大庆铁人中学 2020-2021 学年高二学年下学期期末考试

数学试题（理）

试题说明：1、本试题满分 150 分，答题时间 120 分钟。

2、请将答案填写在答题卡上，考试结束后只交答题卡。

第 I 卷 选择题部分

一、选择题（每小题只有一个选项正确，共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。）

1. 集合 $A = \{x \in R \mid z = x + 2i \text{ 的实部为 } 0\}$, $B = \{y \mid y = |x|, x \in A\}$, $C = \{m \in Z \mid |m| < 3\}$, i 为虚数单位, 则 $\partial_C B$ 为 ()

- A. $\{-2, -1, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-2, 2\}$

2. 设 l_1, l_2 是两条直线, α, β 表示两个平面, 如果 $l_1 \subset \alpha, \alpha \parallel \beta$, 那么“ $l_1 \perp l_2$ ”是“ $l_2 \perp \beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 随机变量 X 的分布列如下表所示, 若 $E(X) = \frac{1}{3}$, 则 $D(3X+1) =$ ()

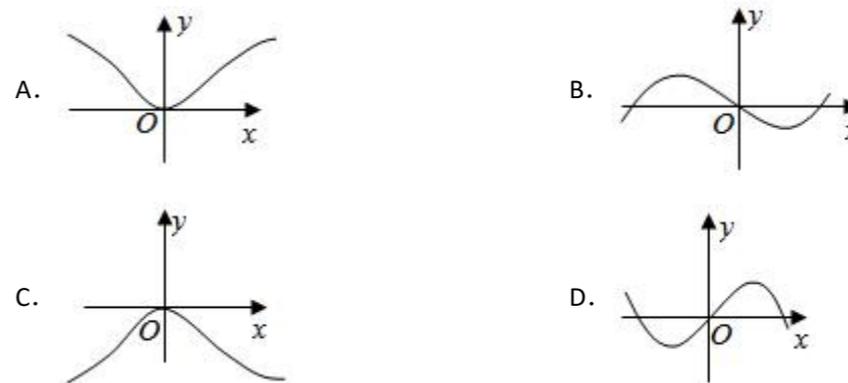
X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	a	b

- A. 9 B. 7 C. 5 D. 3

4. 已知命题 p : 若 $\alpha > 0$, 则 $\sin \alpha < \alpha$; 命题 q : 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 有两个零点, 则下列说法正确的是 ()

- ① $p \wedge q$ 为真命题; ② $\neg p \vee \neg q$ 为真命题; ③ $p \vee q$ 为真命题; ④ $\neg p \vee q$ 为真命题
A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ①③④

5. 函数 $f(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos x$ (其中 e 为自然对数的底数) 的图象大致形状是 ()



6. 为了贯彻落实《中共中央国务院全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》的文件精神, 某学校结合自身实际, 推出了《植物栽培》《手工编织》《实用木工》《实用电工》《烹饪技术》五门校本劳动选修课程, 要求每个学生从中任选三门进行学习, 学生经考核合格后方能获得该学校荣誉毕业证, 则甲、乙两人的选课中仅有一门课程相同的概率为 ()

- A. $\frac{3}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{3}{5}$

7. 若 $\left(x - \frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 的展开式中常数项为 10π , 则直线 $x=0, x=a$, x 轴与曲线 $y = \cos x$ 围成的封闭图形的面积为 ()

- A. $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. 1

8. 某市抽调 5 位医生分赴 4 所医院支援抗疫, 要求每位医生只能去一所医院, 每所医院至少安排一位医生. 由于工作需要, 甲、乙两位医生必须安排在不同的医院, 则不同的安排种数是 ()

- A. 90 B. 216 C. 144 D. 240

9. 一次表彰大会上, 计划安排这 5 名优秀学生代表上台发言, 这 5 名优秀学生代表来自高一、高二和高三三个年级, 其中高一、高二年级各 2 名, 高三年级 1 名. 发言时若要求来自同一年级的学生不相邻, 则不同的排法共有 () 种.

- A. 36 B. 48 C. 72 D. 120

10. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则 ()

- A. 甲与丙相互独立 B. 甲与丁相互独立
C. 乙与丙相互独立 D. 丙与丁相互独立

11. 已知 $a = 2020^{2022}$, $b = 2021^{2021}$, $c = 2022^{2020}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $c < a < b$ B. $a < c < b$
C. $c < b < a$ D. $a < b < c$

12. 定义在 $(-2, 2)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足: $f(x) + e^{4x}f(-x) = 0$, $f(1) = e^2$, 且

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 2f(x)$, 则不等式 $e^{2x}f(2-x) < e^4$ 的解集为 ()

- A. $(1, 4)$ B. $(-2, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$ 的值域为_____.

14. 下列四个命题:

- ① “ $x = 1$ ”是方程“ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的充分不必要条件;
② 命题“若 $a > 2$ 且 $b > 2$, 则 $a + b > 4$ 且 $ab > 4$ ”的逆命题为真命题.
③ 已知命题 P : “ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists m \in \mathbf{R}$ 使得方程 $4^x + 2^x + 1 - m = 0$ ”, 若命题 P 是假命题, 则实数 m 的取值范围为 $m \in (-\infty, 1)$;
④ 设数 $f(x) = \cos|x| + |\cos x|$, 则其最小正周期 $T = 2\pi$.

其中真命题的序号是_____.

15. 某市政府决定派遣 8 名干部 (5 男 3 女) 分成两个小组, 到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作, 若要求每组至少 3 人, 且女干部不能单独成组, 则不同的派遣方案共有_____种. (用数字作答)

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0 \\ |x \ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则方程 $ef(f(x)) + f(x) - 1 = 0$ (e 是自然对数的底数) 的

实根个数为_____.

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分) 已知 P : 函数 $f(x) = (a - m)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, Q : 关于 x 的方程

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

的两根都大于 1.

- (1) 当 $m = 5$ 时, P 是真命题, 求 a 的取值范围;
(2) 若 P 为真命题是 Q 为真命题的充分不必要条件, 求 m 的取值范围.

18. (本小题 12 分) 已知 $(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ 二项展开式中, 第 4 项的二项式系数与第 3 项的二项式系

数的比为 8: 3

- (1) 求 n 的值;
(2) 求展开式中 x^3 项的系数
(3) 计算式子 $C_{10}^0 - 2C_{10}^1 + 4C_{10}^2 - 8C_{10}^3 + \dots + 1024C_{10}^{10}$ 的值.

19. (本小题 12 分) 为加快推进我区城乡绿化步伐, 植树节之际, 决定组织开展职工义务植树活动, 某单位一办公室现安排 4 个人去参加植树活动, 该活动有甲、乙两个地点可供选择. 约定: 每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去哪个地点植树, 掷出点数为 1 或 2 的人去甲地, 掷出点数大于 2 的人去乙地.

(1) 求这 4 个人中去甲地的人数大于去乙地的人数的概率;

(2) 用 X, Y 分别表示这 4 个人中去甲、乙两地的人数, 记 $\xi = |X - Y|$, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$.

20. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (a+1)x + \ln x (a \neq 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \leq -2 - \frac{3}{2a}$.

21. (本小题 12 分) 某商场“五一”期间举行有奖促销活动, 顾客只要在商店购物满 800 元就能得到一次摸奖机会. 摸奖规则是: 在盒子内预先放有 5 个大小相同的球, 其中一个球标号是 0, 两个球标号都是 40, 还有两个球没有标号. 顾客依次从盒子里摸球, 每次摸一个球 (不放回), 若累计摸到两个没有标号的球就停止摸球, 否则将盒子内球摸完才停止. 奖金数为摸出球的标号之和 (单位: 元), 已知某顾客得到一次摸奖机会.

(1) 求该顾客摸三次球被停止的概率;

(2) 设 ξ 为该顾客摸球停止时所得的奖金数, 求 ξ 的分布列及均值.

22. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - a (a \in R)$.

(1) 当 $a = 3$ 时, 求 $f(x)$ 在 (e^{-1}, e^3) 的零点个数;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_2 > x_1$, 证明: $x_1 + x_2 > 4$.