湖南师大附中2022—2023学年度高二第二学期第一次大练习

数　学

命题人：曾克平　周艳军　钱华　周煌

时量：120分钟　满分：150分

得分：

年级＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 座位号＿＿＿＿

密封线内不要答题

一、选择题：本大题共8个小题，每小题5分，满分40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集 $U=\{x\in \mathbf{N}^*\mid x\leqslant 4\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，则 $A\cup(\complement_U B)=$

A．$\{1\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{0,1,2,3\}$

2．命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geqslant x^2$"的否定形式是

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

B．$\forall x\in\mathbf{R}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

3．若 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4a, & x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，则实数 a 的取值范围是

A．$\left[\dfrac{2}{5},3\right)$　　B．$\left(\dfrac{2}{5},3\right]$

C．$(-\infty,3)$　　D．$\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$

4．设每门高射炮命中飞机的概率是0.6．今有一架飞机来犯，问需要多少门高射炮射击，才能以至少99%的概率命中它

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

5．一支医疗小队由3名医生和6名护士组成，他们全部要分配到三家医院．每家医院分到医生1名和护士1至3名，其中护士甲和护士乙必须分到同一家医院，则不同的分配方法有

A．252种　　B．540种　　C．792种　　D．684种

6. 某公交公司推出扫码支付乘车优惠活动，活动为期两周，活动的前五天数据如下表：

第 x 天	1	2	3	4	5
使用人数 y	15	173	457	842	1333

由表中数据可得 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=55x^2+m$，则据此回归模型相应于点(2,173)的残差为

A. -5　　B. -6　　C. 3　　D. 2

7. 下列说法正确的是

A. 样本相关系数 r 越大，两个变量的线性相关性越强；反之，线性相关性越弱

B. 一个人打靶时连续射击三次，则事件“至少有两次中靶”与事件“恰有一次中靶”互为对立事件

C. 在经验回归方程 $\hat{y}=-0.5x+2$ 中，当变量 x 每增加 1 个单位时，变量 $\hat{y}$ 平均减少 0.5 个单位

D. 两个分类变量 x,y 关系越密切，则由观测数据计算得到的 χ^2 的值越小

8. 已知定义域是 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(-x)$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\in(0,1],\\ -x+1, x\in(1,2].\end{cases}$ 若 $x\in[-2,0)$ 时，$f(x)\geqslant\frac{t}{4}-\frac{1}{2t}$ 有解，则实数 t 的取值范围是

A. $(-\infty,-2-\sqrt{6}]\cup[-2+\sqrt{6},+\infty)$

B. $(-\infty,2-\sqrt{6}]\cup(0,2+\sqrt{6}]$

C. $(-\infty,-2-\sqrt{6}]\cup(0,-2+\sqrt{6}]$

D. $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup(0,\sqrt{2}]$

二、选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，满分 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是

A. 命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2>-1$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},x^2<-1$”

B. 命题“$\exists x\in(-3,+\infty),x^2\leqslant 9$”的否定是“$\forall x\in(-3,+\infty),x^2>9$”

C. “$|x|>|y|$”是“$x>y$”的必要条件

D. “$m<0$”是“关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根”的充要条件

10. 下列既是奇函数，又是增函数的是

A. $f(x)=x|x|$

B. $g(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x}$

C. $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+2x, x>0\\ -x^2-2x, x<0\end{cases}$

D. $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2+1}-x)$

11. 下列结论正确的是

A. $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

B. $P(B)=P(A)P(B|A)+P(A)P(\bar{B}|A)$

C. $P(A|B)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)P(B|A)}$

D. $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

12. 设$(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n, x\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}^*$，则下列结论正确的是

A. $-\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{a_n}{2^n}=2^n-1$

B. 当 $n\geqslant 3$ 时，$2a_2+6a_3+\cdots+n(n-1)a_n=4n(n-1)$

C. 若$|a_8|>|a_7|, |a_8|>|a_9|$，则 $n=12$

D. 当 $x=-\dfrac{1}{2000}, n=2022$ 时，则$(1-2x)^n>\dfrac{109}{15}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知集合 $A=\{1,a,b\}, B=\{a^2,a,ab\}$，若 $A=B$，则 $a^{2021}+b^{2020}=$ ________.

14. 已知甲盒装有 3 个红球，m 个白球，乙盒装有 3 个红球，1 个白球，丙盒装有 2 个红球，2 个白球，这些球除颜色以外完全相同. 先随机取一个盒子，再从该盒子中随机取一个球，若取得白球的概率是$\dfrac{37}{84}$，假设取到每一个盒子是等可能的，则 $m=$________.

15. 设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$为奇函数，$f(x+2)$为偶函数，当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=ax^3+bx$，若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\dfrac{2023}{2}\right)=$________.

16. 设实数 x,y 满足 $x^2+xy+y^2=x+y-\dfrac{4}{13}$，则代数式$\dfrac{xy+3}{x+y-\dfrac{4}{13}}$的最小值为________

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$为等差数列，数列$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，满足$a_2=b_1=3, a_5+a_9=26, b_3=a_{14}$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

某小型企业在前半年的利润情况如表所示：

	第 1 个月	第 2 个月	第 3 个月	第 4 个月	第 5 个月	第 6 个月
利润(单位:万元)	4	5	7	14	26	55

设第 i 个月的利润为 y 万元.

(1)根据表中数据，求 y 关于 i 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}(2^i-2i)+\hat{a}$(系数精确到0.01)；

(2)由(1)中的回归方程预测该企业第 7 个月的利润是多少万元？(结果精确到整数部分，如 98.1 万元≈98 万元)

(3)已知 y 关于 i 的样本相关系数为 0.8834. 从相关系数的角度看，y 与 i 的拟合关系式更适合用 $\hat{y}=\hat{p}i+\hat{q}$ 还是 $\hat{y}=\hat{b}(2^i-2i)+\hat{a}$，说明你的理由.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2=1933.5$，$22^2+52^2=3188$，$14\times18.5=259$，$114\times0.96=109.44$，取$\sqrt{4021680}=2005.4$.

附：样本$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$的样本相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}},$$

经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的系数 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

19.（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$BC=BD=DC=2\sqrt{3}$，$AD=AB=PD=PB=2$，$PA=\sqrt{2}$.

(1)求证：平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$；

(2)求二面角 $C-PD-B$ 的余弦值.

0.(本小题满分 12 分)

足球比赛全场比赛时间为 90 分钟，在 90 分钟结束时成绩持平，若该场比赛需要决出胜负，需进行 30 分钟的加时赛，若加时赛仍是平局，则采取“点球大战”的方式决定胜负.“点球大战”的规则如下：①两队应各派 5 名队员，双方轮流踢点球，累计进球个数多者胜；②如果在踢满 5 轮前，一队的进球数已多于另一队踢满 5 次可能射中的球数，则不需再踢，譬如：第 4 轮结束时，双方进球数比为 2∶0，则不需再踢第 5 轮了；③若前 5 轮点球大战中双方进球数持平，则采用“突然死亡法”决出胜负，即从第 6 轮起，双方每轮各派 1 人罚点球，若均进球或均不进球，则继续下一轮，直到出现一方进球另一方不进球的情况，进球方胜.

(1)已知小明在点球训练中射进点球的概率是$\frac{3}{5}$. 在一次赛前训练中，小明射了 3 次点球，且每次射点球互不影响，记 X 为射进点球的次数，求 X 的分布列及数学期望；

(2)现有甲、乙两校队在淘汰赛中(需要分出胜负)相遇，120 分钟比赛后双方仍旧打平，须互罚点球决出胜负. 设甲队每名球员射进点球的概率为$\frac{3}{5}$，乙队每名球员射进点球的概率为$\frac{1}{2}$. 每轮点球中，进球与否互不影响，各轮结果也互不影响. 求在第 4 轮结束时，甲队进了 3 个球并刚好胜出的概率.

21.（本小题满分 12 分）

定义在区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x, y\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 都有 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，且当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$.

(1)判断 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上的单调性并证明；

(2)求实数 t 的取值集合，使得关于 x 的不等式 $f\left(t-\frac{1}{2}x\right)+f(x)>0$ 在区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立.

22.（本小题满分 12 分）

已知点 $F(1,0)$ 为中心在坐标原点的椭圆 C 的焦点，且椭圆过点 $P\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 F 作直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，设 $\overrightarrow{FA}=\lambda\overrightarrow{FB}$，若 $\lambda\in[-2,-1]$，点 $T(2,0)$，求 $|\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}|$ 的取值范围.