

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡的相应位置.

13. 写出曲线 $y = \frac{1}{2} - \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ 的一条对称轴的方程: $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 在 $4^{0.2}, 0.1^{-0.2}, 2\sin 3, 10^{0.16}$ 这4个数中,最小的是 $\underline{\hspace{1cm}}$,最大的是 $\underline{\hspace{1cm}}$. (本题第一空2分,第二空3分)
15. 2023年2月6日,土耳其发生7.8级地震,我国在第一时间派出救援队进行救援.已知某救援队共有8人,根据救灾安排,该救援队需要安排救援人员到三个地区实施救援,每个地区至少安排两人,每人只去一个地区,则共有 $\underline{\hspace{1cm}}$ 种安排方案.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=2, b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_n = \frac{2b_n + b_{n+1}}{3}$, 则 $b_n = \underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)
在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, 2\sin A + \tan A = 0$.
(1) 求 A ;
(2) 若 $b\sin A = 4\sin B$, 且 $\lg b + \lg c \geq 1 - 2\cos(B+C)$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

18. (12分)
某视频UP主采购了8台不同价位的航拍无人机进行测评,并从重量、体积、画质、图传、续航、避障等多方面进行综合评分.以下是价格和对应的评分数据:

价格 x /百元	3	6	8	10	14	17	22	32
评分 y	43	52	60	71	74	81	89	98

- (1) 根据以上数据,求 y 关于 x 的线性回归方程(系数精确到0.01).
(2) 某网友下周将购买一台 X 元的航拍无人机,根据(1)中的回归方程,对即将购买的航拍无人机进行预测评分.设预测评分为 Y (结果精确到整数),若 X 的分布列如下:

X	2000	2500
P	0.6	0.4

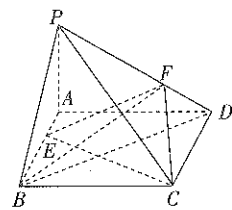
求 Y 的数学期望.

附:对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

参考数据: $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 9138, \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 634$.

19. (12分)
如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形, $AD \perp BP, AP \perp BD, E$ 为棱 AB 上任意一点(不包括端点), F 为棱 PD 上任意一点(不包括端点), 且 $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DP}$.



- (1) 证明:异面直线 CE 与 AP 所成角为定值.
(2) 已知 $AB=AP=1, BC=2$, 当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时,求 PC 与平面 CEF 所成角的正弦值.

20. (12分)
设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-2, 0), B(2, 0)$ 分别是椭圆的左、右顶点, 动直线 l 过点 $C(6, 0)$, 当直线 l 经过点 $D(-2, \sqrt{2})$ 时, 直线 l 与椭圆相切.

- (1) 求椭圆的方程;
(2) 若直线 l 与椭圆交于 P, Q (异于 A, B) 两点, 且直线 AP 与 BQ 的斜率之和为 $-\frac{1}{2}$, 求直线 l 的方程.

21. (12分)
已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
(1) 试问曲线 $y = f(x)$ 是否存在过原点的切线? 若存在, 求切点的坐标; 若不存在, 请说明理由.
(2) 证明: $f(x) > \frac{1}{2}x^2 \ln x$. (参考数据: $e^5 > 128$)

(二)选考题:共10分.请考生从第22,23两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t - 2 \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 N 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t - \sqrt{t}, \\ y = t + \sqrt{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

曲线 N 与 y 轴的交点为 B, C (C 在 B 的上方).

- (1) 若曲线 M 与 x 轴的交点为 A , 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 设 P 为曲线 M 上任意一点, 求线段 PC 中点的轨迹方程(用直角坐标方程表示).

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |x| + |x-a| + |x-4|$.

- (1) 当 $a=0$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 2|x-4|$ 的解集;
(2) 当 $a=1$ 时, 若 $f(x) > m^2$, 求 m 的取值范围.