

2023 届高三考试

数学试题(理科)

考生注意:

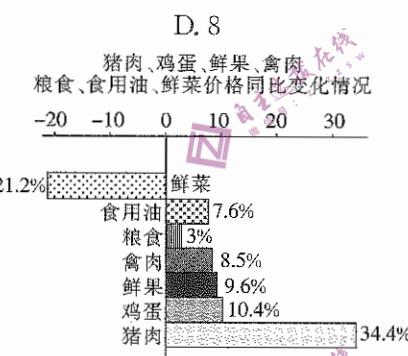
1. 本试卷分选择题和非选择题两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{2, 4, 7, 8, 10\}$, 且 $A \cap B = \{2, 7\}$, 则集合 B 可以为
 - A. {偶数}
 - B. {2, 8, 9}
 - C. {质数}
 - D. {2, 7, 8, 9}

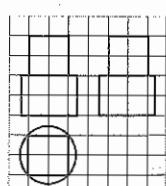
2. 已知复数 $z = 1 - i$, 则 $|z - iz| =$
 - A. 2
 - B. $2\sqrt{2}$
 - C. 4

3. 2022 年 11 月,国内猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油、鲜菜价格同比(与去年同期相比)的变化情况如图所示,则下列说法正确的是



- A. 猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中,食用油价格同比涨幅最小
 - B. 猪肉价格同比涨幅超过禽肉价格同比涨幅的 5 倍
 - C. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月低
 - D. 这 7 种食品价格同比涨幅的平均值超过 7%
4. 若抛物线 C 的焦点到准线的距离为 3,且 C 的开口朝左,则 C 的标准方程为
 - A. $y^2 = -6x$
 - B. $y^2 = 6x$
 - C. $y^2 = -3x$
 - D. $y^2 = 3x$

5. 如图,网格纸小正方形的边长为 1,粗实线绘制的是一个几何体的三视图,则该几何体的体积为

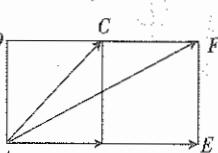


- A. $6 + 4\pi$
- B. $8 + 4\pi$
- C. $4 + 8\pi$
- D. $8 + 6\pi$

6. 小方计划从 4 月 1 日开始存储零钱,4 月 1 日到 4 月 4 日每天都存储 1 元,从 4 月 5 日开始,每天存储的零钱比昨天多 1 元,则小方存钱 203 天(4 月 1 日为第 1 天)的储蓄总额为
 - A. 19903 元
 - B. 19913 元
 - C. 20103 元
 - D. 20113 元

7. 若过 M 作 PQ 的垂线,垂足为 N ,则称向量 \overrightarrow{PM} 在 \overrightarrow{PQ} 上的投影向量为 \overrightarrow{PN} . 如图,已知四边形 $ABCD$, $BCFE$ 均为正方形,现有下列四个结论:

- ① \overrightarrow{AC} 在 \overrightarrow{AF} 上的投影向量为 $\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$;
- ② \overrightarrow{AC} 在 \overrightarrow{AF} 上的投影向量为 $\frac{\sqrt{5}}{3}\overrightarrow{AF}$;

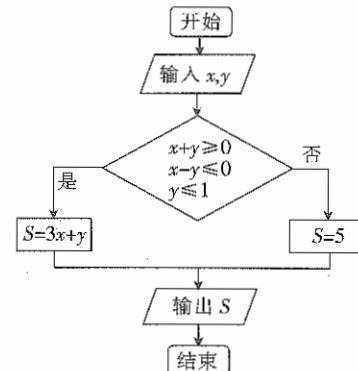


- ③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 在 \overrightarrow{AB} 上的投影向量为 \overrightarrow{AE} ; ④ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 在 \overrightarrow{AB} 上的投影向量为 $\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

其中正确的是

- A. ①③
- B. ①④
- C. ②③
- D. ②④

8. 执行如图所示的程序框图,若输入的 $x, y \in \mathbb{R}$,则



- A. 输出的 S 的最小值为 -2,最大值为 5
- B. 输出的 S 的最小值为 -2,最大值为 4
- C. 输出的 S 的最小值为 0,最大值为 5
- D. 输出的 S 的最小值为 0,最大值为 4

9. 住房的许多建材都会释放甲醛. 甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体,对人体健康有着极大的危害. 新房入住时,空气中甲醛浓度不能超过 0.08 mg/m^3 ,否则,该新房达不到安全入住的标准. 若某套住房自装修完成后,通风 x ($x = 1, 2, 3, \dots, 50$) 周与室内甲醛浓度 y (单位: mg/m^3) 之间近似满足函数关系式 $y = 0.48 - 0.1f(x)$ ($x \in \mathbb{N}^*$),其中 $f(x) = \log_a [k(x^2 + 2x + 1)]$ ($k > 0, x = 1, 2, 3, \dots, 50$),且 $f(2) = 2, f(8) = 3$,则该住房装修完成后要达到安全入住的标准,至少需要通风

- A. 17 周
- B. 24 周
- C. 26 周
- D. 28 周

10. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 O 的球面上,球 O 的表面积为 125π , $AP \perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC, \angle ABC = \frac{\pi}{3}, AB = AD = AP = m, BC = 2m$,则 $m =$

- A. 4
- B. $2\sqrt{5}$
- C. $2\sqrt{6}$
- D. 5

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_2 > x_1$),且 $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_1$,则 $c =$

- A. $-\frac{5}{4}$
- B. $-\frac{3}{2}$
- C. $-\frac{7}{4}$
- D. -2

12. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的上焦点为 F ,过焦点 F 作 C 的一条渐近线的垂线,垂足为 A ,并与另一条渐近线交于点 B ,若 $|FB| = 4|AF|$,则 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
- B. $\frac{\sqrt{15}}{3} \text{ 或 } \frac{2\sqrt{5}}{3}$
- C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
- D. $\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } \frac{2\sqrt{10}}{5}$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡的相应位置.

13. 写出曲线 $y = \frac{1}{2} - \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ 的一条对称轴的方程: $\boxed{\quad}$.

14. 在 $4^{0.2}, 0.1^{-0.2}, 2\sin 3, 10^{0.15}$ 这 4 个数中,最小的是 $\boxed{\quad}$,最大的是 $\boxed{\quad}$. (本题第一空 2 分,第二空 3 分)

15. 2023 年 2 月 6 日,土耳其发生 7.8 级地震,我国在第一时间派出救援队进行救援.已知某救援队共有 8 人,根据救灾安排,该救援队需要安排救援人员到三个地区实施救援,每个地区至少安排两人,每人只去一个地区,则共有 $\boxed{\quad}$ 种安排方案.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=2, b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}, a_n=\frac{2b_n+b_{n+1}}{3}$, 则 $b_n=\boxed{\quad}$.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一) 必考题:共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\sin A + \tan A = 0$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b\sin A = 4\sin B$,且 $\lg b + \lg c \geqslant 1 - 2\cos(B+C)$,求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

18. (12 分)

某视频 UP 主采购了 8 台不同价位的航拍无人机进行测评,并从重量、体积、画质、图传、续航、避障等多方面进行综合评分.以下是价格和对应的评分数据:

价格 x /百元	3	6	8	10	14	17	22	32
评分 y	43	52	60	71	74	81	89	98

(1) 根据以上数据,求 y 关于 x 的线性回归方程(系数精确到 0.01).

(2) 某网友下周将购买一台 X 元的航拍无人机,根据(1)中的回归方程,对即将购买的航拍无人机进行预测评分.设预测评分为 Y (结果精确到整数),若 X 的分布列如下:

X	2000	2500
P	0.6	0.4

求 Y 的数学期望.

附:对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的

最小二乘法估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

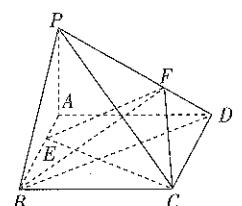
参考数据: $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 9138$, $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 634$.

19. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形, $AD \perp BP, AP \perp BD, E$ 为棱 AB 上任意一点(不包括端点), F 为棱 PD 上任意一点(不包括端点),且 $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DP}$.

(1) 证明: 异面直线 CE 与 AP 所成角为定值.

(2) 已知 $AB=AP=1, BC=2$, 当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时,求 PC 与平面 CEF 所成角的正弦值.



20. (12 分)

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(-2, 0), B(2, 0)$ 分别是椭圆的左、右顶点,动直线 l 过点 $C(6, 0)$,当直线 l 经过点 $D(-2, \sqrt{2})$ 时,直线 l 与椭圆相切.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若直线 l 与椭圆交于 P, Q (异于 A, B)两点,且直线 AP 与 BQ 的斜率之和为 $-\frac{1}{2}$,求直线 l 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

(1) 试问曲线 $y=f(x)$ 是否存在过原点的切线? 若存在,求切点的坐标;若不存在,请说明理由.

(2) 证明: $f(x) > \frac{1}{2}x^2 \ln x$. (参考数据: $e^5 > 128$)

(二) 选考题:共 10 分.请考生从第 22,23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases} x=t^3+t \\ y=t-2 \end{cases}$ (t 为参数),曲线 N 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t-\sqrt{t}, \\ y=t+\sqrt{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 曲线 } N \text{ 与 } y \text{ 轴的交点为 } B, C(C \text{ 在 } B \text{ 的上方}).$$

(1) 若曲线 M 与 x 轴的交点为 A ,求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 设 P 为曲线 M 上任意一点,求线段 PC 中点的轨迹方程(用直角坐标方程表示).

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = |x| + |x-a| + |x-4|$.

(1) 当 $a=0$ 时,求不等式 $f(x) \leqslant 2|x-4|$ 的解集;

(2) 当 $a=1$ 时,若 $f(x) > m^2$,求 m 的取值范围.