

2022—2023 学年度第二学期

五校联考阶段测试高一年级数学试题参考答案

一、单选题

1-5. DBDDC 6-8. DAC

二、多选题

9. BD 10. BD 11. ABC 12. BCD

三、填空题

13. $\left[-\frac{13}{4}, \frac{27}{4}\right]$ 14. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ 15. $1-i/-i+1$ 16. $\frac{27\pi}{2}$

四、解答题

17. (本小题满分 10 分)

$$(1) \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \quad (2) \frac{\sqrt{7}}{14}$$

解: (1) 由题意可得: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

由题意可得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$

$$\text{可得 } \overrightarrow{BN}^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = 4 - 4 + 4 = 4$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2 = -2 - 1 + 4 = 1$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{AM}| = 2, |\overrightarrow{BN}| = \sqrt{7}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 1$$

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{BN}|} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

故 $|\overrightarrow{AM}|, |\overrightarrow{BN}|$ 夹角 θ 的余弦值 $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

18. (本小题满分 12 分)

(1) 1 (2) $\tan \theta$

解: (1) $\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) = \sin 50^\circ \cdot \frac{\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \sin 50^\circ \cdot \frac{2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ}$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

(2) $\frac{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} = \tan \theta.$$

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明见解析 (2) $\sqrt{3}$

解: (1) 证明: 因为 $b \sin B - c \sin C = a$, 所以 $\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A$,

所以 $\sin B \sin(A+C) - \sin C \sin(A+B) = \sin A$.

所以 $\sin B(\sin A \cos C + \cos A \sin C) - \sin C(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = \sin A$,

即 $\sin B \sin A \cos C - \sin C \sin A \cos B = \sin A$.

因为在 $\triangle ABC$ 中 $A, B, C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 即 $\sin B \cos C - \sin C \cos B = 1$,

故 $\sin(B-C) = 1$. 即 $B-C = \frac{\pi}{2}$.

(2) 解: 由 (1) 可知 $B-C = \frac{\pi}{2}$.

因为 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $B+C = \frac{2\pi}{3}$. 则 $B = \frac{7\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{12}$.

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 4$. 则 $b = 4 \sin B$, $c = 4 \sin C$

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} b c \sin A = 4\sqrt{3} \sin B \sin C = 4\sqrt{3} \cos C \sin C = 2\sqrt{3} \sin 2C = \sqrt{3}$.

20. (本小题满分 12 分)

(1) $z = -3 + 2i$ (2) $ab = -\frac{3}{4}$

解: (1) 由 $x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4 = 0$, 即 $(x+3)^2 = -4$,

可得 $x+3 = \pm 2i$, 解得 $x = -3 \pm 2i$,

因为 z 的虚部大于零, 所以 $z = -3 + 2i$

(2) 由 (1) 知 $z = -3 + 2i$, 因为 $az = b - i$, 所以 $az = a(-3 + 2i) = -3a + 2ai = b - i$

则 $\begin{cases} -3a=b \\ 2a=-1 \end{cases}$, 解得 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$, 所以 $ab=-\frac{3}{4}$.

21. (本小题满分 12 分)

22. (1) 证明见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

解: (1) 在 $\triangle GBB_1$ 中, $GB_1 = \frac{1}{2}AB = 2$, $BB_1 = 1$, $\angle A_1B_1B = 60^\circ$,

则在 $\triangle GB_1B$ 中, 由余弦定理得 $GB = \sqrt{GB_1^2 + BB_1^2 - 2GB_1 \cdot BB_1 \cos \angle A_1B_1B} = \sqrt{3}$,

因为 $BB_1^2 + GB^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 = GB_1^2$, 即 $GB_1^2 = BB_1^2 + GB^2$,

所以 $GB \perp BB_1$,

由已知平面 $BB_1C_1C \perp$ 平面 AA_1B_1B , 且平面 $BB_1C_1C \cap$ 平面 $AA_1B_1B = BB_1$,

又 $GB \subset$ 平面 AA_1B_1B , 故 $GB \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

又 $GB \subset$ 平面 GBC , 则平面 $GBC \perp$ 平面 BB_1C_1C .

(2) 由题意知, $V_{A-PBG} = V_{P-ABG}$,

由 (1) 知, $GB \perp$ 平面 BB_1C_1C , $BC \subset$ 平面 BB_1C_1C , 则 $BC \perp GB$,

又 $BC \perp BB_1$, 且 $GB \cap BB_1 = B$, $GB, BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

可得 $BC \perp$ 平面 AA_1B_1B , 因此 PB 为三棱锥 $P-ABG$ 的高,

因为 $\angle A_1B_1B = 60^\circ$, $\angle GBB_1 = 90^\circ$, 所以 $\angle ABG = 30^\circ$,

又 $S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \sin \angle ABG \times AB \times BG = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

所以 $V_{A-PBG} = V_{P-ABG} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABG} \times PB = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

23. (本小题满分 12 分)

(1) $10\sqrt{3}$ (2) $\frac{8}{17}$ (3) 证明见解析.

解: (1) 如图 1,

因为函数 $y = \tan x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，且 $\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\frac{\alpha_1}{2} < \alpha_2$ ，即 $\alpha_1 < 2\alpha_2$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线