南京市 2024 届高三年级学情调研

高三数学

注意事项：

1．本试卷共 6 页，包括单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）四部分．本试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟．

2．答卷前，考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置．

3．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置，在其他位置作答一律无效．

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-4x+3<0\right\}$，$B=\{x \mid 2<x<4\}$，则 $A \cap B=$

A．$\{x \mid 3 \leq x<4\}$　B．$\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$　C．$\{x \mid 2<x \leq 3\}$　D．$\{x \mid 1 \leq x<4\}$

【答案】C

【解析】$A=\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$，$B=\{x \mid 2<x<4\}$，$A \cap B=\{x \mid 2<x \leq 3\}$，选 C.

2．若 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 z 的虚部为

A．2　　B．-2　　C．$2\mathrm{i}$　　D．$-2\mathrm{i}$

【答案】B

【解析】$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\dfrac{3-3\mathrm{i}-\mathrm{i}-1}{2}=1-2\mathrm{i}$，虚部为 -2，选 B.

3．$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中常数项为

A．-24　　B．-4　　C．4　　D．24

【答案】D

【解析】$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=C_4^r(-2)^r x^{4-2r}$，

$r=2$，$T_3=C_4^2(-2)^2=6\times4=24$，选 D.

4．在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为边 AB 的中点.记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$

A．$2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$　　B．$\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　C．$2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$　　D．$-\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$

【答案】D

【解析】D 为 AB 中点，$\therefore \overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\therefore 2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，

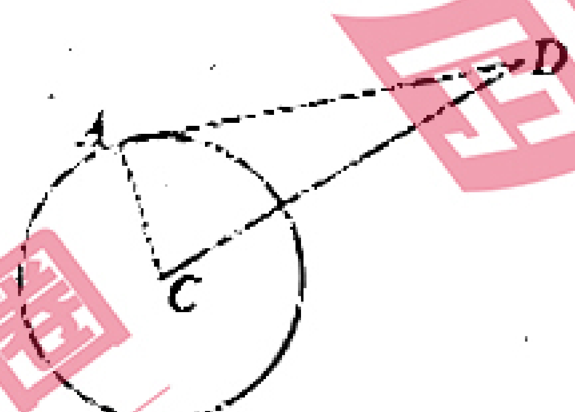
$\therefore \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=2\vec{n}-\vec{m}$，选 D.

5．设 O 为坐标原点，A 为圆 $C: x^2+y^2-4x+2=0$ 上一个动点，则 $\angle AOC$ 的最大值为

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

【答案】C

【解析】圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$，圆心 $(2,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，O 为圆 C 外一点，$\angle AOC$ 最大时，OA 与圆 C 相切，$\mathrm{Rt}\triangle ACO$ 中，$AC=\sqrt{2}$，$OC=2$，$OA=\sqrt{2}$，$\therefore \angle AOC=45°$，选 C.



6．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过点 B 的平面 α 与直线 A_1C 垂直，则 α 截该正方体所得截面的形状为

A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

【答案】A

【解析】$A_1C\perp$ 面 BC_1D，截面为 $\triangle BC_1D$，选 A.

7．新风机的工作原理是，从室外吸入空气，净化后输入室内，同时将等体积的室内空气排向室外.假设某房间的体积为v_0，初始时刻室内空气中含有颗粒物的质量为m.已知某款新风机工作时，单位时间内从室外吸入的空气体积为$v(v>1)$，室内空气中颗粒物的浓度与时刻t的函数关系为$\rho(t)=(1-\lambda)\dfrac{m}{v_0}+\lambda\dfrac{m}{v_0}e^{-vt}$，其中常数$\lambda$为过滤效率.若该款新风机的过滤效率为$\dfrac{4}{5}$，且$t=1$时室内空气中颗粒物的浓度是$t=2$时的$\dfrac{3}{2}$倍，则$v$的值约为

（参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$）

A．1.3862　　B．1.7917　　C．2.1972　　D．3.5834

【答案】B

【解析】$\lambda=\dfrac{4}{5}$，$\rho(t)=\dfrac{1}{5}\dfrac{m}{v_0}+\dfrac{4}{5}\dfrac{m}{v_0}e^{-vt}$，$\rho(1)=\dfrac{3}{2}\rho(2)$，

$\therefore \dfrac{1}{5}\dfrac{m}{v_0}+\dfrac{4}{5}\dfrac{m}{v_0}e^{-v}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{5}\dfrac{m}{v_0}+\dfrac{4}{5}\dfrac{m}{v_0}e^{-2v}\right)$　$e^{v}=6$或2（舍），

$\therefore v=\ln 6=\ln 2+\ln 3=0.6931+1.0986=1.7917$，选B.

8．若函数$f(x)=\sin(\omega\cos x)-1(\omega>0)$在区间$(0,2\pi)$恰有$2$个零点，则$\omega$的取值范围是

A．$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　C．$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】令$\omega\cos x=t\in[-\omega,\omega]$，$f(x)=0\Leftrightarrow \sin t=1$，$\sin t=1$有且仅有一个根，

则$\dfrac{\pi}{2}<\omega<\dfrac{3}{2}\pi$，$\omega\cos x=\dfrac{\pi}{2}$，则$\cos x=\dfrac{\pi}{2\omega}\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$有两个根，选B.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．若$a<0<b$，且$a+b>0$，则

A．$\dfrac{a}{b}>-1$　　B．$|a|<|b|$　　C．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>0$　　D．$(a-1)(b-1)<1$

【答案】ABD

【解析】$a+b>0$，则$a>-b$，则$\frac{a}{b}>-1$，A 对.

$a+b>0$，则$b>-a$，则$|b|>|a|$，B 对.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}<0$，C 错.

$(a-1)(b-1)-1=ab-(a+b)<0$，$\therefore(a-1)(b-1)<1$，D 对，选 ABD.

10．有一组样本数据x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，已知$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=10$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=30$，则该组数据的

A．平均数为2　　B．中位数为2　　C．方差为2　　D．标准差为2

【答案】AC

【解析】$\overline{x}=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=2$，A 对，B 不对. $s^2=\frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{5}(\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-2\times10\overline{x}+5\overline{x}^2)=2$，

C 对，D 不对，选 AC.

11．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，D是AB的中点.将$\triangle ACD$沿CD翻折，得到三棱锥$A'-BCD$，则

A．$CD\perp A'B$

B．当$A'D\perp BD$时，三棱锥$A'-BCD$的体积为$\frac{8}{3}$

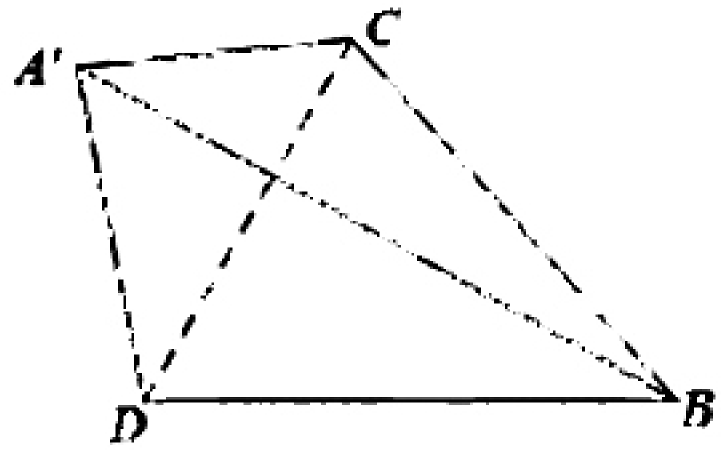
C．当$A'B=2\sqrt{3}$时，二面角$A'-CD-B$的大小为$\frac{2\pi}{3}$

D．当$\angle A'DB=\frac{2\pi}{3}$时，三棱锥$A'-BCD$的外接球的表面积为$20\pi$

【答案】ACD

【解析】$CD\perp A'D$，$CD\perp BD$，$A'D\cap BD=D$，$A'D,BD\subset$平面$A'BD$，$\therefore CD\perp$面$A'BD$

$\therefore CD\perp A'B$，A 对.



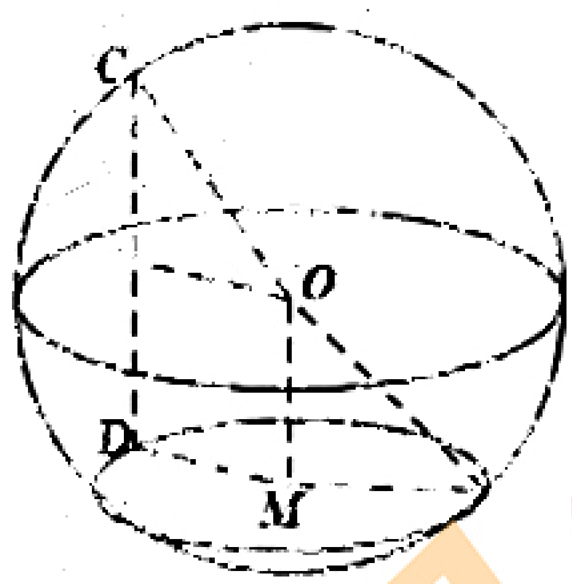
$A'D \perp BD$，$A'D \perp CD$，$BD \cap CD = D$，$BD, CD \subset$ 平面 BCD，$\therefore A'D \perp$ 面 BCD

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$，$A'D = 2$，$S = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$，B 错.

$A'D = BD = 2$，$A'B = 2\sqrt{3}$，$\cos\angle A'DB = -\frac{1}{2}$，$\therefore \angle A'DB = \frac{2}{3}\pi$，

二面角 $A' - CD - B$ 为 $\frac{2}{3}\pi$，C 对.

$A'B = 2\sqrt{3}$，设 $\triangle A'BD$ 的外接圆 M 半径为 r，则 $2r = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$，$\therefore r = 2$



$\begin{cases} OM^2 + 4 = R^2 \\ (2 - OM)^2 + 4 = R^2 \end{cases}$，$\therefore R^2 = 5$，$4\pi R^2 = 20\pi$，D 对，选 ACD.

12．函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，若 $f(x) - f(-x) = 2x$，$f'(1+x) + f'(1-x) = 0$，则

A．$y = f(x) + x$ 为偶函数　　B．$f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称

C．$f'(0) = 1$　　D．$f'(x+2) = f'(x) + 2$

【答案】BC

【解析】方法一：$f(x) - x = f(-x) - (-x)$，$g(x) = f(x) - x$ 为偶函数，A 错.

$f(x) - f(-x) = 2x$，则 $f'(x) + f'(-x) = 2$，则 $f'(0) + f'(0) = 2$，则 $f'(0) = 1$，C 对

$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称 $\Leftrightarrow f(1+x)=f(1-x)\Leftrightarrow f'(1+x)=-f'(1-x)$

$\Leftrightarrow f'(1+x)+f'(1-x)=0$，B 对.

$f(2+x)=f(-x)=f(x)-2x$，$f'(2+x)=f'(x)-2$，D 错，选 BC.

方法二：$\because f(x)-f(-x)=2x$，$\therefore f(-x)+x=f(x)-x$，$\therefore y=f(x)-x$ 为偶函数，A 错.

$\because f'(1+x)+f'(1-x)=0\Rightarrow f(1+x)=f(1-x)+C$，令 $x=0\Rightarrow C=0$

$\therefore f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，B 正确.

对于 C，由 $f(x)-f(-x)=2x\Rightarrow f'(x)+f'(-x)=2\Rightarrow 2f'(0)=2$，$f'(0)=1$，C 正确.

对于 D，由 $f(x+1)=f(1-x)\Rightarrow f(-x)=f(x+2)$，$\therefore f(x)-f(x+2)=2x$

$\Rightarrow f(x+2)=f(x)-2x$，$\therefore f'(x+2)=f'(x)-2$，D 错.选：BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(3,4)$，则 $\sin(\pi+\alpha)=$________.

【答案】 $-\dfrac{4}{5}$

【解析】 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

14．某批麦种中，一等麦种占 90%，二等麦种占 10%，一、二等麦种种植后所结麦穗含有 50 粒以上麦粒的概率分别为 0.6，0.2，则这批麦种种植后所结麦穗含有 50 粒以上麦粒的概率为________.

【答案】 0.56

【解析】 $P=0.9\times0.6+0.1\times0.2=0.56$.

15．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n(n+2)}, n\text{为奇数},\\ a_{n-1}, n\text{为偶数},\end{cases}$ 则 $S_8=$________.

【答案】 $\dfrac{16}{9}$

【解析】n为奇数，$\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$，$a_1+a_3+a_5+a_7=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，

n为偶数，$a_2+a_4+a_6+a_8=a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{8}{9}$，$\therefore S_8=\frac{16}{9}$.

16．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$P$是$C$右支上一点，线段$PF_1$与$C$的左支交于点$M$.若$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，且$|PM|=|PF_2|$，则$C$的离心率为________.

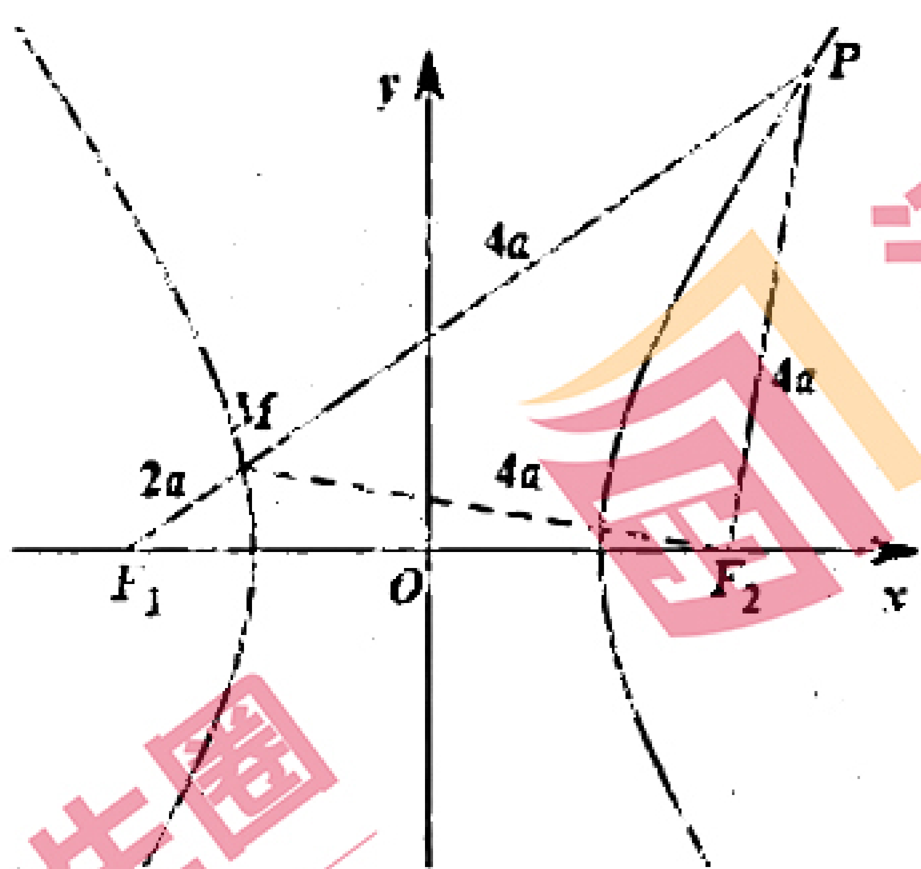
【答案】$\sqrt{7}$

【解析】方法一：$PM=PF_2$，$\angle F_2PM=\frac{\pi}{3}$，$\triangle PMF_2$为正三角形，

$PF_1-PF_2=(PM+MF_1)-PF_2=MF_1=2a$，$\therefore MF_2=4a$，$\angle F_1MF_2=\frac{2}{3}\pi$，

$\triangle MF_1F_2$中，$4c^2=4a^2+16a^2-2\cdot2a\cdot4a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=28a^2$，$\therefore c=\sqrt{7}a$，$\therefore e=\sqrt{7}$

方法二：连接MF_2，$PF_1-PF_2=MF_1=2a$，$\therefore MF_2=4a$，



$\because\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，$PM=PF_2$，$\therefore\triangle PMF_2$为等边三角形，$\therefore PM=PF_2=4a$，

在$\triangle PF_1F_2$中，$2c=\sqrt{36a^2+16a^2-2\cdot6a\cdot4a\cdot\frac{1}{2}}=2\sqrt{7}a$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{7}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1+a_4=18$，$a_2a_3=32$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=2b_n-a_n, n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$是等差数列.

【解析】

（1）$\because\{a_n\}$为等比数列，$\therefore a_2a_3=a_1a_4=32$且$\{a_n\}$公比$q>1$，

$\therefore\begin{cases}a_1=2\\a_4=16\end{cases}\Rightarrow q^3=8$，$q=2$，$\therefore a_n=2^n$.

（2）$S_n=2b_n-2^n$①，$S_{n+1}=2b_{n+1}-2^{n+1}$②

②−①，$\Rightarrow b_{n+1}=2b_{n+1}-2b_n-2^n$，$\therefore b_{n+1}-2b_n=2^n\Rightarrow\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{1}{2}, n\in\mathbf{N}^*$为常数，$\therefore\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$是等差数列.

18.（12分）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=0$.

（1）求A；

（2）若$a=3$，$\sin B\sin C=\dfrac{1}{4}$，求$\triangle ABC$的面积.

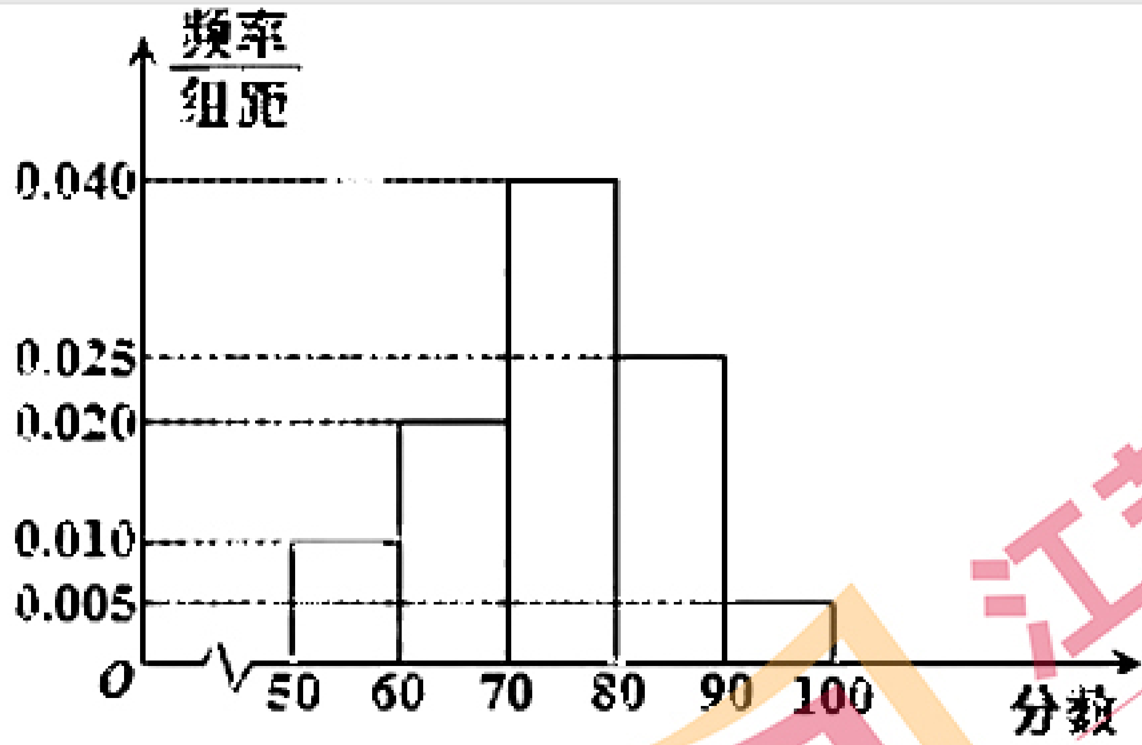
【解析】

（1）$\sin A\sin B+\sqrt{3}\sin B\cos A=0\Rightarrow\tan A=-\sqrt{3}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\Rightarrow\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}b=2\sqrt{3}\sin B\\c=2\sqrt{3}\sin C\end{cases}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\sin B\cdot2\sqrt{3}\sin C\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

19.（12分）某地区对某次考试成绩进行分析，随机抽取100名学生的A,B两门学科成绩作为样本.将他们的A学科成绩整理得到如下频率分布直方图，且规定成绩达到70分为良好.已知他们中B学科良好的有50人，两门学科均良好的有40人.



（1）根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为这次考试学生的A学科良好与B学科良好有关；

	B学科良好	B学科不够良好	合计
A学科良好			
A学科不够良好			
合计			

（2）用样本频率估计总体概率，从该地区参加考试的全体学生中随机抽取3人，记这3人中A,B学科均良好的人数为随机变量X，求X的分布列与数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】

（1）A学科良好的有$(0.4+0.25+0.05)\times100=70$，补充$2\times2$列联表如下：

	B学科良好	B学科不够良好	合计
A学科良好	40	30	70
A学科不够良好	10	20	30
合计	50	50	100

$\therefore K^2=\dfrac{100\times(40\times20-30\times10)^2}{70\times30\times50\times50}\approx4.76>3.841$.

$\therefore$有95%的把握认为这次考试学生的A学科良好与B学科良好有关.

（2）随机抽取一人，A,B均良好的频率为$\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$.

$\therefore X$的所有可能取值为$0,1,2,3$.

$P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125}$

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$，$P(X=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$.

$\therefore X$的分布列如下：

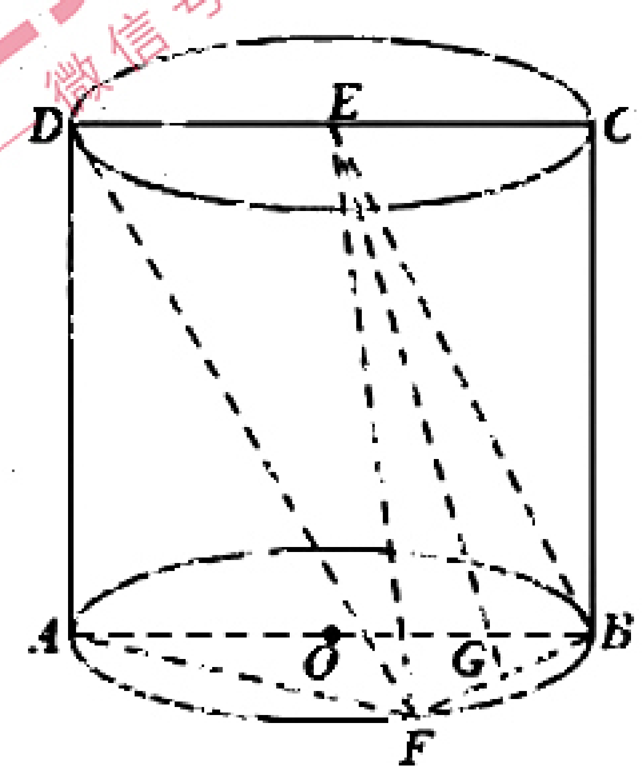
X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

$E(X)=\dfrac{54}{125}+\dfrac{72}{125}+\dfrac{24}{125}=\dfrac{6}{5}$，或$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$，$E(X)=np=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$.

20．（12分）如图，四边形$ABCD$是圆柱OE轴截面，点F在底面圆O上，$OA=BF=\sqrt{3}$，$AD=3$，点G是线段BF的中点.

（1）证明：EG // 平面DAF；

（2）求直线EF与平面DAF所成角的正弦值.



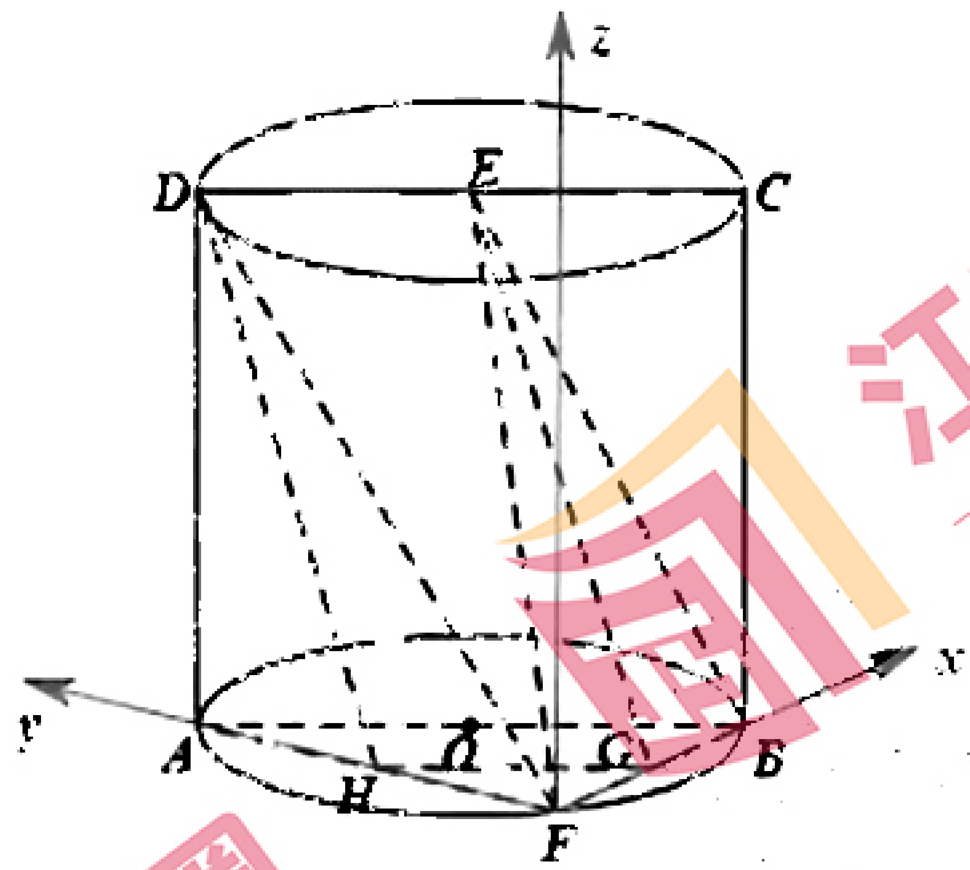
【解析】

（1）证明：取AF中点H，连接GH，DH，$\therefore GH \overset{//}{=} \dfrac{1}{2}AB$，

又$\because DE \overset{//}{=} \dfrac{1}{2}AB$，$\therefore GH \overset{//}{=} DE$，$\therefore$四边形$GHDE$为平行四边形，

$\therefore EG$ // DH，$\because EG\not\subset$平面DAF，$DH\subset$平面DAF，$\therefore EG$ // 平面DAF

（2）如图分别以FB,FA，过F且与底面$\odot O$垂直的直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系



$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\right)$，$F(0,0,0)$，$D(0,3,3)$，$A(0,3,0)$

$\therefore \overrightarrow{FE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\right)$，平面 DAF 的一个法向量 $\vec{n}=(1,0,0)$，

设直线 EF 与平面 DAF 所成角为 θ，$\therefore \sin\theta=\frac{|\overrightarrow{FE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{FE}||\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+9}}=\frac{1}{4}$.

21.（12 分）已知 O 为坐标原点，$F(1,0)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，过 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点.当 A 为短轴顶点时，$\triangle OAF$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.

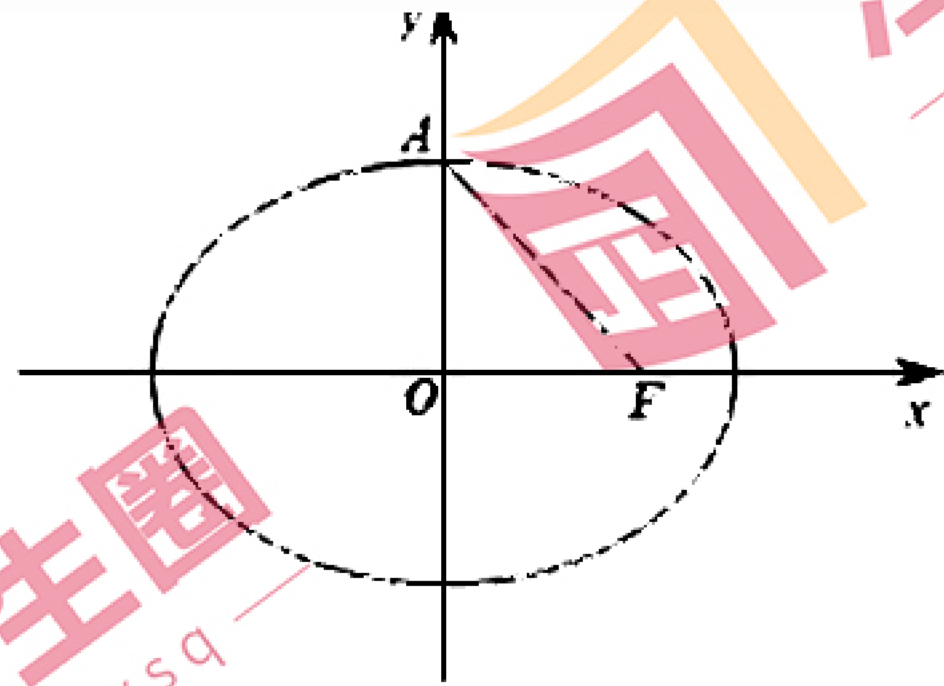
（1）求 C 的方程；

（2）若线段 AB 的垂直平分线分别交 x 轴、y 轴于点 P,Q，M 为线段 AB 的中点，求 $|PM|\cdot|PQ|$ 的取值范围.

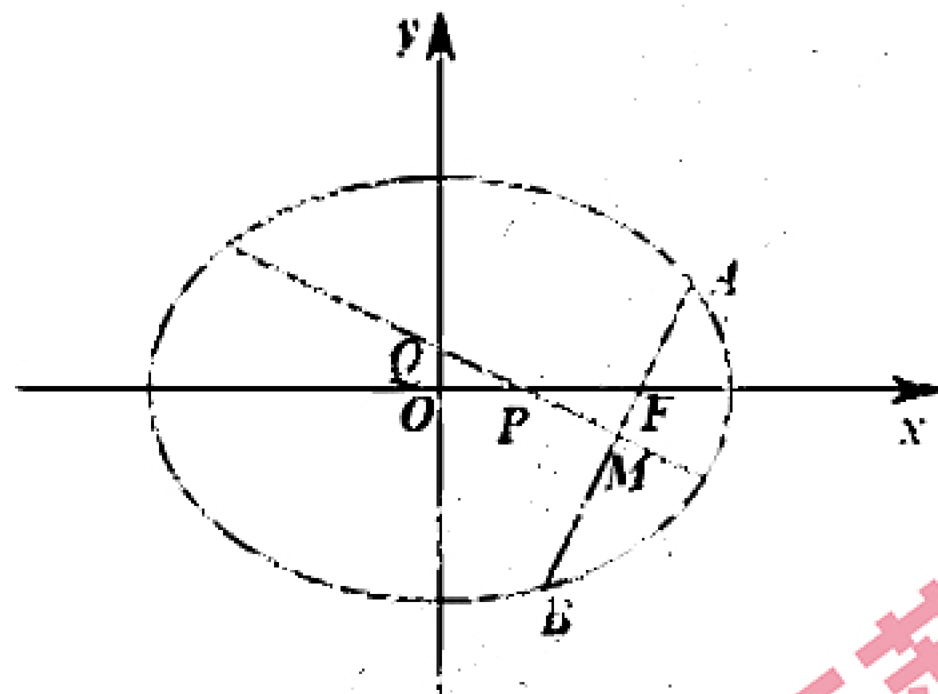
【解析】

（1）$OF=c=1$，$OA=b$，$AF=a$，$\therefore a+b+1=3+\sqrt{3}$ 且 $a^2-b^2=1$，

$\therefore a-b=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，$\therefore \begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.



（2）设直线AB的方程为：$x=my+1$，$m\neq 0$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$



$$\begin{cases} x=my+1 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow (3m^2+4)y^2+6my-9=0$$

$$\therefore y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3m}{3m^2+4}，\therefore x_0=\frac{-3m^2}{3m^2+4}+1=\frac{4}{3m^2+4}，\therefore M\left(\frac{4}{3m^2+4},\frac{-3m}{3m^2+4}\right)，$$

$\therefore AB$的垂直平分线为：$y=-m\left(x-\dfrac{4}{3m^2+4}\right)-\dfrac{3m}{3m^2+4}$，

令$x=0\Rightarrow y_Q=\dfrac{m}{3m^2+4}$，

$$\therefore |PM|\cdot|PQ|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot\left|\frac{3m}{3m^2+4}\right|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot\left|\frac{m}{3m^2+4}\right|=\frac{3(m^2+1)}{(3m^2+4)^2}$$

令$m^2+1=t$，$t>1$，$\therefore |PM|\cdot|PQ|=\dfrac{3t}{(3t+1)^2}=\dfrac{3}{9t+\frac{1}{t}+6}\in\left(0,\dfrac{3}{16}\right)$

$\therefore |PM|\cdot|PQ|$的取值范围为$\left(0,\dfrac{3}{16}\right)$

22.（12分）已知函数$f(x)=ae^x-x-a$，其中$a>0$.

（1）若$a=1$，证明：$f(x)\geq 0$；

（2）设函数 $g(x)=xf(x)$，若 $x=0$ 为 $g(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

【解析】

（1）$a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=0$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\swarrow$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$，

$\therefore f(x)\geq f(0)=0$.

（2）$g(x)=x(ae^x-x-a)$，$g'(x)=ae^x-x-a+(ae^x-1)x=ae^x(1+x)-2x-a$

$g'(0)=0$，$g''(x)=ae^x(x+2)-2$，$g''(0)=2a-2$.

①若 $a\geq1$，则当 $x>0$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)\nearrow$，此时 $g'(x)>g'(0)=0$

$\therefore g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上 $\nearrow$，这与 $x=0$ 为 $g(x)$ 的极大值点矛盾，舍去.

②若 $0<a<1$ 时，$g'''(x)=ae^x(x+3)$，$g''(x)$ 在 $(-3,+\infty)$ 上 $\nearrow$

注意到 $g''(0)=2a-2<0$，$g''\left(\frac{2}{a}-2\right)=2\left(e^{\frac{2}{a}-2}-1\right)>0$，

$\therefore$ 在 $x\in(-3,+\infty)$ 上存在唯一的 $x_0\in\left(0,\frac{2}{a}-2\right)$ 使 $g''(x_0)=0$，

且当 $-3<x<x_0$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)\swarrow$，注意到 $g'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $-3<x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)\nearrow$；当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)\swarrow$

满足 $x=0$ 为 $g(x)$ 的极大值点，

综上：实数 a 的取值范围为 $(0,1)$