咸阳市 2023 年高考模拟检测(三)

数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. B　2. C　3. C　4. B　5. D　6. D　7. C　8. D　9. C　10. B　11. A　12. C

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 79　14. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$　15. $(1-\pi,1+\pi)$　16. 23

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. 解:(Ⅰ)这 100 份数学试卷的平均分为

$60\times0.02+70\times0.08+80\times0.14+90\times0.15+100\times0.24+110\times0.15+120\times0.1+130\times0.08+140\times0.04=100.$ ………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)抽查的 100 份试卷中,成绩位于区间[125,135)的有 8 份,位于区间[135,145]的有 4 份,共计 12 份试卷. 从中抽取 3 份试卷,这 3 份试卷中成绩在[135,145]的试卷数 X 的可能取值是 0、1、2、3.

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{14}{55}$, $P(X=1)=\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}=\frac{28}{55}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_8^1}{C_{12}^3}=\frac{12}{55}$, $P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{55}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{14}{55}+1\times\frac{28}{55}+2\times\frac{12}{55}+3\times\frac{1}{55}=\frac{55}{55}=1$. ………………………………………… (12 分)

18. 解:(Ⅰ)证明:在 $\triangle GBB_1$ 中,$GB_1=\frac{1}{2}AB=2$,$BB_1=1$,$\angle A_1B_1B=60°$,

则 $GB=\sqrt{GB_1^2+BB_1^2-2GB_1\cdot BB_1\cos\angle A_1B_1B}=\sqrt{3}$,

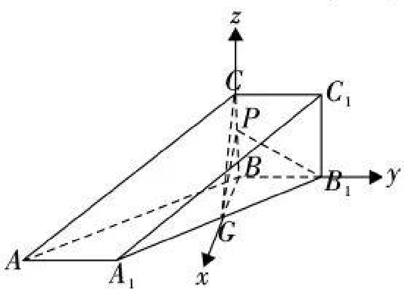
则 $GB_1^2=BB_1^2+GB^2$,即 $GB\perp BB_1$,

由已知平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 AA_1B_1B,且平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $AA_1B_1B=BB_1$,

又 $GB\subsetneq$ 平面 AA_1B_1B,故 $GB\perp$ 平面 BB_1C_1C.

又 $GB\subsetneq$ 平面 GBC,则平面 $GBC\perp$ 平面 BB_1C_1C. ………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)存在,$BP=\frac{1}{2}$,证明如下:



如图,以 B 为坐标原点,以 BG、BB_1、BC 分别为 x、y、z 轴,建立空间直角坐标系,

则 $B(0,0,0)$,$G(\sqrt{3},0,0)$,$B_1(0,1,0)$,$P(0,0,t)(0\leqslant t\leqslant1)$,

则 $\overrightarrow{GB_1}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{B_1P}=(0,-1,t)$.

设平面 PGB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{GB_1}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{B_1P}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+tz=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=\sqrt{3}t, x=t$，即 $\boldsymbol{n}=(t,\sqrt{3}t,\sqrt{3})$.

又平面 BB_1G 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

则二面角 $P-GB_1-B$ 的余弦值为 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2+3t^2+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^2+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $t^2=\dfrac{1}{4}$，又 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 $t=\dfrac{1}{2}$. 来源:高三答案公众号

故 $BP=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………（12 分）

19. 解：（Ⅰ）$\because a_{n+1}-2a_n=n-1$，且 $a_1=1$，

$\therefore a_{n+1}+n+1=2a_n+2n=2(a_n+n)$.

由于 $a_1=1$，则 $a_1+1=2\neq 0$，$\therefore a_n+n\neq 0$.

则$\dfrac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=2$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n+n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n-n$. ………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）$\because a_n=2^n-n$，

$\therefore S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(2-1)+(2^2-2)+(2^3-3)+\cdots+(2^n-n)$

$=2^{n+1}-2-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\because S_n<2\,023$，即 $2^{n+1}-2-\dfrac{n(n+1)}{2}<2\,023$，

$\therefore$ 满足 $S_n<2\,023$ 的 n 的最大值为 10. ……………………………………………………………（12 分）

20. 解：（Ⅰ）$\because \angle F_1MF_2$ 的最大值为 120°，

$\therefore M$ 为短轴的端点时 $\angle F_1MF_2=120^\circ$，此时易得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又点 M 到右焦点 F_2 距离的最大值为 $2+\sqrt{3}$，即 $a+c=2+\sqrt{3}$，

解得 $a=2, c=\sqrt{3}$.

又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $b=1$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意，设直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=my+\sqrt{3},\end{cases}$得 $(m^2+4)y^2+2\sqrt{3}my-1=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+4}$，

$S_{\triangle F_1AB}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=\sqrt{3}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}=4\sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt{m^2+1}}}$

$\leqslant 4\sqrt{3}\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=2$，

当且仅当 $\sqrt{m^2+1}=\dfrac{3}{\sqrt{m^2+1}}$ 即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时取等号.

$\therefore$ 所求直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}=0$ 或 $x-\sqrt{2}y-\sqrt{3}=0$. ……………………………………… (12 分)

21. 解:(Ⅰ)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-\ln x$,得 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$,

切点 $(1,e)$,斜率 $f'(1)=e-1$,所求切线方程为:$y-e=(e-1)(x-1)$,

即 $(e-1)x-y+1=0$. ……………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)$f(x)\geqslant 0$,即 $e^x+x-ax-\ln(ax)\geqslant 0\ (a>0,x>0)$

$\Leftrightarrow e^x+x\geqslant ax+\ln(ax)\ (a>0,x>0)$ 来源:高三答案公众号

$\Leftrightarrow e^x+x\geqslant e^{\ln(ax)}+\ln(ax)\ (a>0,x>0)$.

令 $g(x)=e^x+x$,显然 $g(x)$ 是增函数,于是上式可化为 $g(x)>g(\ln(ax))$,

即 $x\geqslant\ln(ax)\ (a>0,x>0)\Leftrightarrow\ln a\leqslant x-\ln x\ (a>0,x>0)$.

令 $\varphi(x)=x-\ln x\ (x>0)$,则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$,易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减,在 $(1,+\infty)$ 上递增,

故 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=1$,于是 $\ln a\leqslant 1$,可得 $0<a\leqslant e$.

故 $a\in(0,e]$. ……………………………………………………………………………………… (12 分)

(二)选考题:共 10 分,考生从 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. 解:(Ⅰ)直线 $l:\begin{cases}x=a-2t\\ y=-1+t\end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程为 $x+2y+2-a=0$,

$\rho=2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$,即 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$,即 $x^2+y^2=2x+2y$,即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$,

圆心 $C(1,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|5-a|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{\sqrt{5}|5-a|}{5}$. …………………………………… (5 分)

(Ⅱ)圆的半径为 $\sqrt{2}$,弦的一半为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore(\dfrac{3\sqrt{5}}{5})^2+(\dfrac{\sqrt{5}|5-a|}{5})^2=(\sqrt{2})^2$,

即 $a^2-10a+24=0$,解得 $a=4$ 或 $a=6$. ……………………………………………………… (10 分)

23. 解:(Ⅰ)$f(x)=|x-1|+|x+2|\geqslant|(x-1)-(x+2)|=3$,当且仅当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时取等号,

$\therefore f(x)_{\min}=3$,即 $p=3$. …………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)证明:依题意可知 $a^2+2b^2+3c^2=2p=6$,则由柯西不等式得

$[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2][a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]\geqslant(a+2b+3c)^2$,

$\therefore(a+2b+3c)^2\leqslant 36$,即 $|a+2b+3c|\leqslant 6$,

当且仅当 $a=b=c=\pm1$ 时取等号. ……………………………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。