

贵州省卓越发展计划高二测试参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	C	B	D	C	ACD	AD	ABD	ABD

1. 【解析】

2. 【解析】

3. 【解析】因为 $y = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，函数的周期为 π ，显然是非奇非偶函数，

A 不正确；

因为 $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，函数的周期为 2π ，B 不正确；

因为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ ，函数的周期为 π ，是偶函数，C 正确；

因为 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$ ，函数的周期为 π ，是奇函数，D 不正确；故选：C

4. 【解析】

5. 【解析】由斐波那契数列为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., 知 $a_4 + a_8 = 3 + 21 = 24$.

故选：C

6. 【解析】

7. 【解析】对于 A, 每人各有 4 种选择, 每人都安排一项工作的不同方法数为 4^4 , A 错误；

对于 B, 将 4 名同学按 2, 1, 1 分成 3 组有 C_4^2 种方法, 再将这 3 组分配到 3 个比赛场馆, 共有 A_3^3 种, 则所有分配方案共有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ (种), B 错误；

对于 C, 由题可知, 甲两天, 乙三天, 丙和丁各一天, 所以不同的安排方法有 $C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot A_2^2 = 420$ 种, C 错误；

对于 D, 先将 4 名志愿者分成 2 组, 每组 2 个人或者一组 3 人, 一组 1 人, 若每组 2 个人, 分别分配给 2 个项目, 则有 $C_4^2 = 6$ 种分法, 若一组 3 人, 一组 1 人, 分别分配给 2 个项目, 则有 $C_4^3 A_2^2 = 8$ 种分法, 因此不同的分配方案共 14 种, D 正确.

8. 【解析】构造函数 $F(x) = f(x) - x$, 因为 $f'(x) > 1$, 所以 $F'(x) = f'(x) - 1 > 0$, 可知函数 $F(x)$ 在 R 上单调递增, $F(1) = f(1) - 1 = -f(-1) - 1 = 1$, 不等式 $f(x-1) > x$ 化为 $f(x-1) - (x-1) > 1$, 即 $F(x-1) > F(1)$, 由单调递增可得 $x-1 > 1$, 即 $x > 2$, 故选 C.

9. 【解析】已知函数是奇函数且图象关于直线 $x=1$ 对称, 可知函数的周期为 4, 由 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 内的图象可知函数对称轴为 $x=1+2k, k \in Z$, 对称中心为 $(2k, 0), k \in Z$. 所以

$f(-4)=f(0)=0$, $f(5)=f(1)=1$, A 正确; 如果 $f(x-4)=f(x+1)$, 则 $f(x)=f(x+5)$, 周期为 5, 所以 B 错误; 直线 $x=-3$ 是函数的一条对称轴, C 正确; 点 $(4,0)$ 为函数的一个对称中心, D 正确, 故选 ACD .

10. 【解析】对于 A : 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\vec{b} = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

此时 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = 0$, 故 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 即 A 正确;

对于 B : 若 $\frac{1}{a} \parallel \frac{1}{b}$, 则 $\cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta$, 所以 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 故 B 错误;

对于 C : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \in [-2, 2]$, 故 C 错误;

对于 D : 因为 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 所以 $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$,

所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{5 - 4\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}$,

因为 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \in [-1, 1]$, 所以 $5 - 4\sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \in [1, 9]$, 所以 $|\vec{a} - \vec{b}| \in [1, 3]$, 故 D 正确;

故选: AD

11. 【解析】对于 A , 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, E 为 AC 中点, $\because AB=BC$, $\therefore$ 在等腰三角形 ABC 中, $BE \perp AC$, 又在直三棱柱中, $AA_1 \perp$ 面 ABC 且 BE 在面 ABC 内, $\therefore AA_1 \perp BE$ 且 $AA_1 \cap AC = A$, AA_1, AC 在面 AA_1C_1C 内, $\therefore BE \perp$ 面 AA_1C_1C 且 C_1E 在面 AA_1C_1C 内, $\therefore BE \perp C_1E$, A 正确;

对于 B , 在直三棱柱中, $BB_1 \perp$ 面 ABC 且 BB_1 在面 B_1EB 内, $\therefore$ 面 $B_1EB \perp$ 面 ABC , B 正确;

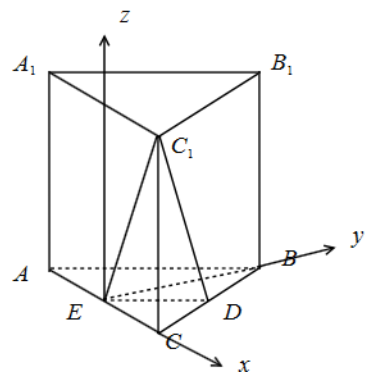
对于 C , 若 $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 , 易得 $\lambda = \mu$ 且 $\lambda, \mu \in (0, 1)$, C 错误;

对于 D , 如图建系, 设 $AB=BC=BB_1=2$, 则 $B_1(0, \sqrt{3}, 2), C_1(1, 0, 2), E(0, 0, 0)$, 设平面 B_1C_1E 的

法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EC_1} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{3}y + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n} = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right)$$

则平面 BDE 与平面 B_1C_1E 所成的夹角的余弦值为



$$\frac{1}{1 \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{3} + 1}} = \frac{\sqrt{57}}{19}, \text{ D 正确.}$$

故选 ABD.

12. 【详解】ABD 因为 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$, 且 $\ln a \ln b = 1$, 可得 $a > e > b > 1$,

对于选项 A: $\because a > e > b > 1 \therefore 2^a > 2^b$ 故 A 正确;

对于选项 B: 因为 $1 = \ln a \ln b < \frac{(\ln a + \ln b)^2}{4} = \frac{(\ln ab)^2}{4}$, 即 $\frac{\ln^2 ab}{4} > 1$,

解得 $\ln ab > 2$, 所以 $ab > e^2$, 故 B 正确;

对于选项 C: 因为 $a > e > b > 1$, 则 $(a-1)(b-1) = ab + 1 - (a+b) > 0$,

可得 $ab + 1 > a + b$, 所以 $\log_2(ab+1) > \log_2(a+b)$, 故 C 错误;

构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x > 1)$, 则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$,

所以函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $a > e > b > 1$,

所以 $\frac{e^a}{a} > \frac{e^b}{b}$, 所以 $\frac{e^a}{e^b} > \frac{a}{b}$, 即 $e^{a-b} > \frac{a}{b}$, D 正确;

13. 24; 【解析】

14. $\frac{1}{3}$; 【解析】

15. $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 【解析】

16. $a_n = n \cdot 2^{n+1}$; 6. (第一空 2 分, 第二空 3 分) 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, 由

$$na_{n+1} = 2(n+1)a_n \text{ 得: } \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}, \text{ 而 } \frac{a_1}{1} = 4,$$

于是得数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 则 $\frac{a_n}{n} = 4 \cdot 2^{n-1}$, 即 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$;

显然, $\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1) \cdot 2^{n+2} - (n+2) \cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1},$

则 $S_n = (\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}) + (\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}) + (\frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{4}) + \cdots + (\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}) + (\frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1}) = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2,$

由 $S_n \geq 30$ 得: $\frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 \geq 30$, 即 $\frac{2^{n+2}}{n+2} \geq 32$, 令 $b_n = \frac{2^{n+2}}{n+2}$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(n+2)}{n+3} > 1$, 即数列 $\{b_n\}$

是递增数列,

由 $\frac{2^{n+2}}{n+2} \geq 32$, 得 $b_n \geq 32$, 而 $b_6 = 32$, 因此, $b_n \geq b_6$, 从而得 $n \geq 6$, $n_{\min} = 6$,

所以满足不等式 $S_n \geq 30$ 的 n 的最小值为 6.

故答案为: $a_n = n \cdot 2^{n+1}$; 6

17.解: 若选择①: 由已知条件及正弦定理, 得

$\frac{b}{a+c} = \frac{a-c}{b} + \frac{c}{a+c}, \dots\dots\dots 1 \text{分}$

即 $\frac{b-c}{a+c} = \frac{a-c}{b}$. 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$. $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

又因为 $A \in (0, \pi)$, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

所以 $A = \frac{\pi}{3}$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

若选择②: 因为 $2a \cos B = 2c - b$, 由正弦定理得

$2 \sin A \cos B = 2 \sin C - \sin B$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

所以 $2 \sin A \cos B = 2 \sin(A+B) - \sin B = 2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) - \sin B$, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以 $2 \cos A \sin B - \sin B = 0$, 又 $\sin B \neq 0$, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 因为 $0 < A < \pi$, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

所以 $A = \frac{\pi}{3}$; $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

若选择③: 因为 $a^2 - b^2 = ac \cos B - \frac{1}{2}bc$,

所以根据余弦定理, 可得

$a^2 - b^2 = ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{1}{2}bc$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

所以 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$3 分

因为 $A \in (0, \pi)$,4 分

所以 $A = \frac{\pi}{3}$5 分

(2) 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$,7 分

所以 $bc \leq 4$, 当且仅当 $b = c = 2$ 时取等号;8 分

又因为 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}AD \cdot a$ 且 $a = 2$

所以 $AD = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \sqrt{3}$,9 分

故 AD 的最大值为 $\sqrt{3}$10 分

18 解: 用比例分配的分层随机抽样方法从这 100 盒牛排中抽取 10 盒,1 分

其中 T 骨牛排有 3 盒, 非 T 骨牛排有 7 盒,3 分

再从中随机抽取 4 盒, 设恰好有 2 盒牛排是 T 骨牛排为事件 A ,

则 $P(A) = \frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$;6 分

(2) 这 100 盒牛排中菲力牛排有 20 盒, 所以菲力牛排的频率为 $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$,7 分

设从这批牛排中随机抽取 1 盒, 抽到菲力牛排的事件为 B ,

将频率视为概率, 用样本估计总体可得 $P(B) = \frac{1}{5}$,8 分

从这批牛排中随机抽取 3 盒, 抽到的菲力牛排的数量 X 满足 $X: B\left(3, \frac{1}{5}\right)$,9 分

$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$,10 分

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{125}, P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}$12 分

19. 解: (1) 完成列联表如图所示:1 分

	男生	女生	合计
了解	15n	10n	25n
不了解	5n	10n	15n

合计	$20n$	$20n$	$40n$
----	-------	-------	-------

$$\chi^2 = \frac{40n(15n \times 10n - 10n \times 5n)^2}{25n \times 15n \times 20n \times 20n} = \frac{8}{3}n, \quad \text{-----2 分}$$

由题意可得 $5.024 \leq \frac{8n}{3} < 6.635$, 解得 $1.884 \leq n < 2.488125$, -----4 分

又因 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 2$; -----6 分

(2) 由 (1) 得了解中国航天事业的学生有 $25 \times 2 = 50$ 人, -----7 分

其中男生有 30 人, 女生有 20 人, -----8 分

则所抽取 5 人中男生 $30 \times \frac{5}{50} = 3$ 人, 设为 A, B, C , 女生 $20 \times \frac{5}{50} = 2$ 人, 设为 a, b , -----9 分

从 5 人中再抽取 3 人的基本事件有: $ABC, ABa, ABb, ACa, ACb, Aab, BCa, BCb, Bab, Cab$, 共 10 种,

其中符合男生至少 2 人的基本事件有: $ABC, ABa, ABb, ACa, ACb, BCa, BCb$, 共 7 种, -----11 分

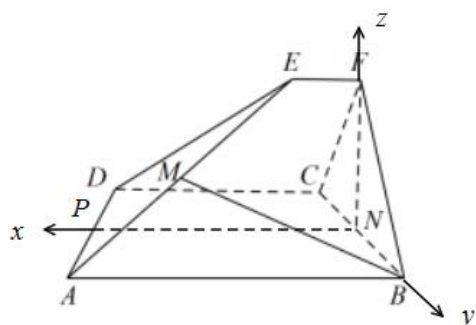
则至少有 2 名男生被第二次调查的概率 $P = \frac{7}{10}$. -----12 分

20.(1) $\because$ 由图一得: $DC \perp CF, DC \perp CB$, 且 $CF \cap CB = C$,

$\therefore$ 在图 2 中 $DC \perp$ 平面 BCF , $\angle BCF$ 是二面角 $F-DC-B$ 的平面角, 则 $\angle BCF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCF$ 是正三角形, 且 N 是 BC 的中点, $\therefore FN \perp BC$. 又 $DC \perp$ 平面 BCF , $FN \subset$ 平面 BCF , 可得 $FN \perp CD$, 而 $BC \cap CD = C$, $\therefore FN \perp$ 平面 $ABCD$, 而 $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore FN \perp AD$.

(2) 因为 $FN \perp$ 平面 $ABCD$, 过点 N 做 AB 平行线 NP , 所以以点 N 为原点, NP, NB, NF 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系 $N-xyz$,



则 $A(5, \sqrt{3}, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), D(3, -\sqrt{3}, 0), E(1, 0, 3)$, 设 $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\therefore \vec{AM} = (x_0 - 5, y_0 - \sqrt{3}, z_0), \vec{AE} = (-4, -\sqrt{3}, 3), \vec{AD} = (-2, -2\sqrt{3}, 0), \vec{DE} = (-2, \sqrt{3}, 3)$$

$$\because \vec{AM} = \lambda \vec{AE}, \therefore \begin{cases} x_0 - 5 = -4\lambda \\ y_0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3}\lambda \\ z_0 = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 4\lambda \\ y_0 = \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda \\ z_0 = 3\lambda \end{cases} \therefore M(5 - 4\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 3\lambda)$$

$\therefore \vec{BM} = (5 - 4\lambda, -\sqrt{3}\lambda, 3\lambda)$, 设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DE} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -2x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2x + \sqrt{3}y + 3z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n} = (\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}),$$

设直线 BM 与平面 ADE 所成角为 θ ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{BM} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BM}|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3+1+3} \cdot \sqrt{28\lambda^2 - 40\lambda + 25}} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\therefore 28\lambda^2 - 40\lambda + 13 = 0, \therefore \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = \frac{13}{14}$$

21. (1) 抛物线的准线为 $x = -\frac{p}{2}$, 当 MD 与 x 轴垂直时, 点 M 的横坐标为 p ,

此时 $|MF| = p + \frac{p}{2} = 3$, 所以 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$;

$$(2) \text{ 设 } M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right), \text{ 直线 } MN: x = my + 1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 可得 } y^2 - 4my - 4 = 0, \Delta > 0, y_1 y_2 = -4,$$

$$\text{由斜率公式可得 } k_{MN} = \frac{y_1 + y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}, \quad k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4},$$

$$\text{直线 } MD: x = \frac{x_1 - 2}{y_1} \cdot y + 2, \text{ 代入抛物线方程可得 } y^2 - \frac{4(x_1 - 2)}{y_1} \cdot y - 8 = 0,$$

$\Delta > 0, y_1 y_3 = -8$, 所以 $y_3 = 2y_2$, 同理可得 $y_4 = 2y_1$,

$$\text{所以 } k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{4}{2(y_1 + y_2)} = \frac{k_{MN}}{2}$$

又因为直线 MN 、 AB 的倾斜角分别为 α, β , 所以 $k_{AB} = \tan \beta = \frac{k_{MN}}{2} = \frac{\tan \alpha}{2}$,

若要使 $\alpha - \beta$ 最大, 则 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 设 $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$, 则

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

当且仅当 $\frac{1}{k} = 2k$ 即 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立,

所以当 $\alpha - \beta$ 最大时, $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设直线 $AB: x = \sqrt{2}y + n$,

代入抛物线方程可得 $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$,

$\Delta > 0, y_3 y_4 = -4n = 4y_1 y_2 = -16$, 所以 $n = 4$,

所以直线 $AB: x = \sqrt{2}y + 4$.

22. (1) 因为函数 $f(x) = \ln(x+1) (x > -1)$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x+1} \therefore f'(0) = 1 \therefore f(0) = 0$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程 $y = x$

(2) 设 $g(x) = \ln(x+1) - x, (x > -1)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

由 $g(0) = 0$ 得 $g(x) \leq 0$, 即当 $x > -1$ 时, $\ln(x+1) \leq x \dots\dots\dots (*)$

令 $h(x) = x - a^2 e^x + a, x > -1$

$h'(x) = 1 - a^2 e^x$, 令 $h'(x) = 0$ 得 $x = -2 \ln a \leq 0$

当 $-2 \ln a \leq -1$ 即 $a \geq \sqrt{e}$ 时, $h'(x) < 0$, 有 $h(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减

$$\text{所以 } h(x) < -1 - \frac{a^2}{e} + a = \frac{-e - a^2 + ae}{e} < 0$$

当 $-2 \ln a > -1$ 即 $1 \leq a < \sqrt{e}$ 时, 有 $h(x)$ 在 $(-1, -2 \ln a)$ 单调递增, 在 $(-2 \ln a, +\infty)$ 递减

$$\text{所以 } h(x) \leq h(-2 \ln a) = -2 \ln a + a - 1$$

$$\text{令 } \varphi(a) = 2 \ln a - a + 1, \quad h'(a) = \frac{2}{a} - 1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 > 0$$

所以 $\varphi(a)$ 在 $[1, \sqrt{e})$ 单调递增, 有 $\varphi(a) \geq \varphi(1) = 0$, 所以 $h(x) \leq 0$

故 $a \geq 1$ 时, $h(x) \leq 0$ 对 $x \in (-1, +\infty)$ 恒成立, 即 $x \leq a^2 e^x - a$ 对 $x \in (-1, +\infty)$ 恒成立

由 $(*)$ 可知 $\ln(x+1) \leq x$ 因此, 当 $a \geq 1$ 时, $\ln(x+1) \leq a^2 e^x - a$