2024 届高三入学摸底考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】A

【解析】由不等式 $x^2-2x-3<0$，可得 $-1<x<3$，即集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，又集合 $B=\{-1,0,1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$．故选 A.

2.【答案】B

【解析】因为 $(z+1)(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，所以 $z+1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$，所以 $z=-1+\mathrm{i}$，所以 z 对应的点位于第二象限，故选 B.

3.【答案】C

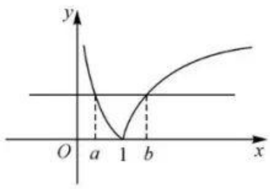
【解析】由已知圆台的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\left[(\pi\times1^2)+(\pi\times2^2)+\sqrt{(\pi\times1^2)\times(\pi\times2^2)}\right]\times3=7\pi$，故选 C.

4.【答案】D

【解析】由题设可设圆心为 $(a,a)(a>0)$，则圆的半径为 a．
故圆的方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，再把点 $(2,0)$ 代入得 $(2-a)^2+(0-a)^2=a^2$，
解得 $a=2$，故圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$，故所求圆的圆心为 $(2,2)$，
故圆心到直线 $2x+y-11=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2\times2+2-11|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$．故选 D.

5.【答案】D

【解析】由 $f(a)=f(b)$ 得 $|\ln a|=|\ln b|$．根据函数 $y=|\ln x|$ 的图象及 $0<a<b$，
得 $-\ln a=\ln b$，$0<a<1<b$，所以 $\dfrac{1}{a}=b$.



令 $g(b)=a+2b=2b+\dfrac{1}{b}$，根据对勾函数的图象与性质易得 $g(b)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(b)>g(1)=3$．故 $a+2b>3$，故选 D.

6.【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的两条相邻的对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{3}$，即 $\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=3$，从而 $f\left(\dfrac{5\pi}{18}\right)=2\sin\left(3\times\dfrac{5\pi}{18}+\varphi\right)=0$，即 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$，所以 $\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，故选 B.

7.【答案】C

【解析】记事件 A：甲和乙选择的景点不同，事件 B：甲和乙恰好有一人选择大峡谷景点，

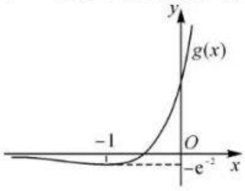
由题知，$P(A)=\dfrac{A_4^2}{C_4^1C_4^1}=\dfrac{3}{4}$，$P(AB)=\dfrac{C_2^1A_3^1}{C_4^1C_4^1}=\dfrac{3}{8}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}$，故选 C.

8.【答案】B

【解析】由题意知：$f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=a-2(1+2x)e^{2x}$，

令 $f'(x)=0$，则 $\dfrac{a}{2}=(1+2x)e^{2x}$，令 $g(x)=(1+2x)e^{2x}$，则 $g'(x)=2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}=(4x+4)e^{2x}$，

∴当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，∴$g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(-1)=-e^{-2}$，当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)<0$ 恒成立，∴$g(x)$ 大致图象如图所示，



则当 $-\dfrac{1}{e^2}<\dfrac{a}{2}<0$，即 $-\dfrac{2}{e^2}<a<0$ 时，$g(x)$ 与 $y=\dfrac{a}{2}$ 有两个不同交点，此时 $f'(x)$ 有两个零点，所以 $f(x)$ 有两个极值点；因为 $-\dfrac{2}{e^2}<a<0$ 时，$-\dfrac{3}{e^2}<a<0$ 成立，$f(x)$ 有两个极值点，但 $-\dfrac{3}{e^2}<a<0$ 时，若 $-\dfrac{3}{e^2}<a\leqslant-\dfrac{2}{e^2}$，$f'(x)=a-2(1+2x)e^{2x}=a-2g(x)\leqslant0$，所以 $f(x)$ 没有极值点，所以 $-\dfrac{3}{e^2}<a<0$ 是函数 $f(x)$ 有两个极值点的必要不充分条件，故选 B.

9.【答案】BCD

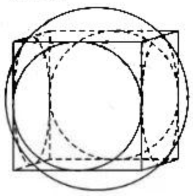
【解析】对于 A，在频率分布直方图中，各小长方形的面积等于相应各组的频率，故 A 错误；
对于 B，因为 $8\times0.75=6$，故该组数据的第 75 百分位数为第 6 个数和第 7 个数的平均数 10，故 B 正确；
对于 C，由残差定义，如果样本数据点分布的带状区域越狭窄，说明该模型的拟合精度越高，故 C 正确；
对于 D，根据正态分布密度函数的性质知 $P(\xi>4)=1-P(\xi<4)=0.16$，$\therefore P(\xi<0)=P(\xi>4)=0.16$，
$P(0<\xi<4)=1-0.16\times2=0.68$，$P(2<\xi<4)=\dfrac{P(0<\xi<4)}{2}=0.34$，故 D 正确. 故选 BCD.

10.【答案】ACD

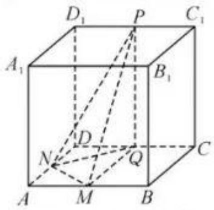
【解析】由题意，螺线与坐标轴依次交于 $A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，…，可知 $A_6(0,-6)$，故选项 A 正确；
可得 $|OA_n|=n$，$|OA_{n+1}|=n+1$，$|OA_{n+2}|=n+2$，所以 $2|OA_{n+1}|=|OA_n|+|OA_{n+2}|$，故选项 C 正确；
$\triangle OA_7A_8$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|OA_7||OA_8|=\dfrac{1}{2}\times7\times8=28$，故选项 B 错误；
因为 $S_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}}=S_{\triangle OA_nA_{n+1}}+S_{\triangle OA_{n+1}A_{n+2}}=\dfrac{1}{2}|OA_n||OA_{n+1}|+\dfrac{1}{2}|OA_{n+1}||OA_{n+2}|=\dfrac{1}{2}n\cdot(n+1)+\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)=(n+1)^2$，又 $\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为 169，可得 $(n+1)^2=169$，解得 $n=12$. 故选项 D 正确. 故选 ACD.

11.【答案】ACD

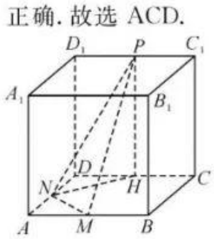
【解析】对于 A，如下图所示，正方体的棱切球 O 的半径 $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\pi$，故 A 正确；



对于 B，若球体、正方体的体积分别为 V_1，V_2，球 O 在正方体外部的体积 $V_3>V_1-V_2=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-1$，故 B 错误；
对于 C，设 CD 中点为 Q，连接 MQ，PQ，
若 P 为 C_1D_1 中点，则 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$，MN 在面 $ABCD$ 内，所以 $PQ\perp MN$，
在 $\triangle NMQ$ 中，$MN=NQ=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$MQ=1$，
所以 $MN^2+NQ^2=MQ^2$，故 $MN\perp NQ$，因为 $PQ\cap NQ=Q$，$PQ,NQ\subset$ 平面 NPQ，
所以 $MN\perp$ 平面 NPQ，因为 $NP\subset$ 平面 NPQ，所以 $MN\perp NP$，故 C 正确；



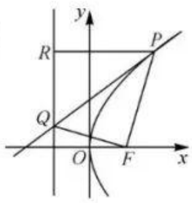
对于 D，过点 P 作 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，连接 NH，则直线 NP 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle PNH$，所以 $\tan\angle PNH=\dfrac{PH}{NH}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+DH^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+DH^2}}$，当 P 在 C_1 时，$DH_{\max}=1$，所以 $(\tan\angle PNH)_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 正确. 故选 ACD.



12.【答案】ABD

【解析】由已知 $p=2$，故 A 正确；

因为点 P 在准线 l 上的射影为点 R，即 $PR\perp QR$，所以 $|PR|=|PF|$，因为 $\angle PQR=\angle PQF$，即 PQ 为 $\angle FQR$ 的角平分线，所以 $\angle PFQ=\angle QRP=90^\circ$，故 B 正确；



点 Q 是斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线与抛物线准线的交点，$PF\perp QF$，如图所示，设 $P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$，则直线 PQ 为 $y-m=\frac{3}{4}\left(x-\frac{m^2}{4}\right)$，令 $x=-1$，得 $y_Q=\frac{16m-3m^2-12}{16}$，

由 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=\left(\frac{m^2}{4}-1,m\right)\cdot\left(-2,\frac{16m-3m^2-12}{16}\right)=2-\frac{m^2}{2}+\frac{16m^2-3m^3-12m}{16}=0$，整理可得 $3m^3-8m^2+12m-32=(m^2+4)(3m-8)=0$，则 $m=\frac{8}{3}$，得 $P\left(\frac{16}{9},\frac{8}{3}\right)$，故 $|PR|=\frac{m^2}{4}+1=\frac{25}{9}$，故选项 C 错误；

由 $m=\frac{8}{3}$，得直线 PQ 为 $y=\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}$，令 $x=-1$ 得 $Q\left(-1,\frac{7}{12}\right)$，又 $R\left(-1,\frac{8}{3}\right)$，从而 $|RQ|=\frac{25}{12}$，所以四边形 $FPRQ$ 的面积为 $2S_{\triangle PRQ}=|PR|\cdot|RQ|=\frac{25}{9}\times\frac{25}{12}=\frac{625}{108}$，故 D 正确. 故选 ABD.

13.【答案】$\frac{\pi}{3}$.

【解析】设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 θ，由已知 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=2^2+4\times2\times1\times\cos\theta+4\times1^2=(2\sqrt{3})^2$，得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

14.【答案】$\frac{7}{9}$

【解析】因为 $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，

所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

15.【答案】2

【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(x+1)=-f(1-x)$，又 $f(x+3)=f(1-x)$，可得 $f(x+3)=-f(x+1)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(2)+f(4)=0$，$f(1)+f(3)=0$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]-f(2024)=-f(0)=2$.

16.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】连接 OP，由已知 $PF_1\perp PF_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$，

在 $\triangle OPA_2$ 中，$\tan\angle POA_2=\frac{b}{a}$，则 $\cos\angle POA_2=\frac{a}{c}$，又 $|OA_2|=a$，则由余弦定理得 $|PA_2|^2=|OP|^2+|OA_2|^2-2|OP|\cdot|OA_2|\cdot\cos\angle POA_2$，解得 $|PA_2|=b$，

由 $|OP|^2+|OA_2|^2=|PA_2|^2$ 知 $PA_2\perp OA_2$，即 $PA_2\perp A_1A_2$ $\left(\text{由题意，联立方程}\begin{cases}x^2+y^2=c^2,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}\text{可求得点 }P\text{ 的坐标为 }P(a,\pm b)\right)$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle PA_1A_2$ 中，$\tan\angle PA_1A_2=\frac{|PA_2|}{|A_1A_2|}$，即 $\frac{b}{2a}=1$，则 $\frac{b}{a}=2$，

所以双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

17.【解析】(1) 由已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，记其公差为 d.

当 $n\geqslant2$ 时，$\begin{cases}2a_{n+1}=a_n+n+3,\\ 2a_n=a_{n-1}+(n-1)+3,\end{cases}$ 两式相减得 $2(a_{n+1}-a_n)=(a_n-a_{n-1})+1$，…………………… 2 分

所以 $2d=d+1$，解得 $d=1$，…………………………………………………………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$2a_2=a_1+1+3$，得 $2(a_1+1)=a_1+4$，所以 $a_1=2$，…………………………… 4 分

所以 $a_n=2+(n-1)\times1=n+1$；…………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=2^{a_n}=2^{n+1}$，所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2$， ………… 7 分

又 $b_1=4$，所以数列$\{b_n\}$是首项为 4，公比为 2 的等比数列，………… 8 分

所以 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{4(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-4$(或 $4(2^n-1)$；$4\cdot 2^n-4$)． ………… 10 分

18.【解析】(1)因为$\sqrt{3}\sin A=\sqrt{3}\sin B\cos C-\sin B\sin C$，

所以$\sqrt{3}\sin B\cos C-\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin(C+B)$ ………… 1 分

$=\sqrt{3}\sin C\cos B+\sqrt{3}\cos C\sin B$，

所以$-\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos B$， ………… 3 分

由于 $0<C<\pi$，则 $\sin C>0$，

所以$-\sin B=\sqrt{3}\cos B$， ………… 4 分

即 $\tan B=-\sqrt{3}$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$； ………… 6 分

(2)因为 B 的角平分线交 AC 于点 D，且 $BD=2$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，

根据三角形面积公式可得$\frac{1}{2}ac\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，………… 8 分

又 $BD=2$，得 $ac=2(a+c)\geqslant 4\sqrt{ac}$，得 $ac\geqslant 16$，当 $a=c=4$ 时等号成立， ………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\geqslant\frac{1}{2}\times 16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$，即$\triangle ABC$ 的面积最小值为 $4\sqrt{3}$． ………… 12 分

19.【解析】(1)取 CD 的中点 O，连接 EO，BO，$\because E$ 为 PC 中点，

$\therefore EO/\!/PD$，而 $EO\not\subset$平面 PAD，$PD\subset$平面 PAD，$\therefore EO/\!/$平面 PAD，………… 2 分

$\because\angle ABC=\angle CDA=90^\circ$，$\angle BAD=120^\circ$，$\therefore\angle BCD=60^\circ$，

又 $AB=AD$，$\therefore\angle ADB=\angle ABD=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$，

$\therefore\angle CBD=\angle CDB=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

$\therefore\triangle BCD$ 为等边三角形，$\therefore BO\perp CD$，又 $AD\perp CD$，$\therefore BO/\!/AD$， ………… 4 分

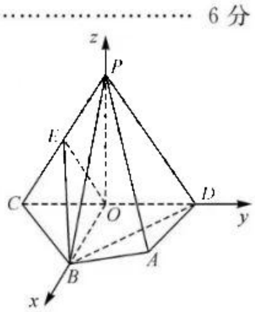
而 $BO\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，$\therefore BO/\!/$平面 PAD，

又 $EO\cap BO=O$，$\therefore$平面 $EOB/\!/$平面 PAD，而 $EB\subset$平面 EOB，

$\therefore EB/\!/$平面 PAD； ………… 6 分

(2)$\because PC=PD$，$\therefore PO\perp CD$．$\because$平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$，

又$\triangle BCD$ 为等边三角形，$\therefore BO\perp CD$， ………… 7 分



$\because$在$\triangle ABD$ 中，$AD=AB=2$，$\angle DAB=120^\circ$，$\therefore BD=2\sqrt{3}$，

$\because PC=PD=2\sqrt{3}$，$\therefore PO=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，

在等边$\triangle BCD$ 中，$\because BD=2OD=2\sqrt{3}$，$\therefore OD=OC=\sqrt{3}$，$OB=3$． ………… 8 分

以 O 为坐标原点，OB，OD，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$，

则 $B(3,0,0)$，$C(0,-\sqrt{3},0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,3)$，

$\therefore\overrightarrow{OB}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{CB}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,\sqrt{3},3)$， ………… 9 分

设平面 PCB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=3x+\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$， ………… 10 分

$\because OB\perp CD$，$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$，平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore BO\perp$平面 $ABCD$，$\therefore$平面 PCD 的一个法向量为$\overrightarrow{OB}=(3,0,0)$， ………… 11 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{3}{\sqrt{5}\times 3}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故二面角 $B-CP-D$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$． ………… 12 分

另解：又$\triangle BCD$ 为等边三角形，$\therefore BO\perp CD$，又平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，

平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$，$\therefore OB\perp$平面 PCD，过点 O 作 $OH\perp PC$，连接 BH，

则 $BH\perp CP$，故$\angle BHO$ 为二面角 $B-CP-D$ 的平面角． ………… 9 分

$\because$在$\triangle ABD$ 中，$AD=AB=2$，$\angle DAB=120^\circ$，$\therefore BD=2\sqrt{3}$，

$\because PB=PD=2\sqrt{3}$，$\therefore PO=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，

在等边$\triangle BCD$ 中，$\because BD=2OD=2\sqrt{3}$，$\therefore OD=OC=\sqrt{3}$，$OB=3$．

$\therefore OH=\dfrac{OC\cdot OP}{CP}=\dfrac{\sqrt{3}\times 3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}$，$BH=\sqrt{OB^2+OH^2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，…………………………… 11 分

所以 $\cos\angle BHO=\dfrac{OH}{BH}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $B-CP-D$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)设该应聘者应聘甲公司恰好通过两项技能测试为事件 A，应聘乙公司恰好通过两项技能测试为事件 B，

根据题意可得 $P(A)=C_3^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$，…………………………………………………………… 2 分

$P(B)=\dfrac{5}{6}\times C_2^1\ \dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$；…………………………………………………… 5 分

(2)设该应聘者应聘甲公司通过的项目数为 X，应聘乙公司通过的项目数为 Y，

根据题意可知，$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，则 $E(X)=3\times\dfrac{2}{3}=2$，…………………………………………………………… 6 分

$P(Y=0)=\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)(1-m)=\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{18}m$，…………………………………………………………… 7 分

$P(Y=1)=\dfrac{5}{6}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)(1-m)+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{2}{3}(1-m)+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)m=\dfrac{7}{18}-\dfrac{1}{3}m$， …………… 8 分

$P(Y=2)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}(1-m)+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{2}{3}m+\dfrac{5}{6}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)m=\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{6}m$，

$P(Y=3)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}m=\dfrac{5}{9}m$.…………………………………………………………………………………… 9 分

则随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{18}m$	$\dfrac{7}{18}-\dfrac{1}{3}m$	$\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{6}m$	$\dfrac{5}{9}m$

…… 10 分

$E(Y)=\left(\dfrac{7}{18}-\dfrac{1}{3}m\right)\times 1+\left(\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{6}m\right)\times 2+\dfrac{5}{9}m\times 3=\dfrac{3}{2}+m$， …………………………………………… 11 分

若 $E(Y)>E(X)$，则$\dfrac{3}{2}+m>2$，故$\dfrac{1}{2}<m<1$，

即 m 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. ……………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，$f(x)\geqslant -1$，得 $a\leqslant\dfrac{x-1}{x\ln x}$， …………………………………………………… 1 分

令 $h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}$， …………………………………………………… 2 分

又 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$\ln x<x-1$，可知 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减， ……………………………… 4 分

所以 $h(x)\geqslant h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}$，故 $a\leqslant\dfrac{1}{\ln 2}$；…………………………………………………………………… 5 分

(2)由 $g(x)=\ln(x+1)-x\ln x+x$ 可知 $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

因为 $t(x)=g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln x$， …………………………………………………………………………… 6 分

$t'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x}<0$，所以 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，………………………………………… 7 分

$g'(1)=\dfrac{1}{2}>0$，$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{5}-\ln\dfrac{3}{2}<0$，

存在 $x_0\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0+1}$， ………………………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以 $g(x)$在 $x=x_0$ 处取得唯一极大值，也是最大值，……………………………………………………………… 9 分

所以 $M=g(x_0)=\ln(x_0+1)-x_0\ln x_0+x_0=\ln(x_0+1)-\dfrac{x_0}{x_0+1}+x_0$， ………………………………… 10 分

令 $\varphi(x)=\ln(x+1)+x+\dfrac{1}{x+1}-1, x\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}+1>0$，$\varphi(x)$ 单调递增， ………… 11 分

故 $M=\ln(x_0+1)-\dfrac{x_0}{x_0+1}+x_0<\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{10}<1+\dfrac{9}{10}<2$，

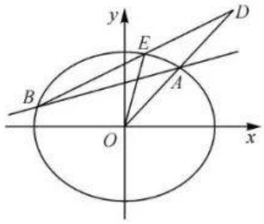
所以 $M<2$. ………………………………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)设椭圆半焦距为 c，点 $P(x_0,y_0)$，则 $|y_0|\leqslant b$，

则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_0|\leqslant cb=\sqrt{3}$，即 $bc=\sqrt{3}$. ………………………………………… 2 分

又 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, a^2=b^2+c^2$，求得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$， ………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ………………………………………………… 4 分



(2)如图所示，设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，

当直线 l 的斜率存在时，设直线 $l: y=kx+m\,(m\neq 0)$，

与 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立可得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

且有 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}, x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$，

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)>0\,(*)$. ………………………………………… 5 分

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3m^2-12k^2}{4k^2+3}$， ………………………………… 6 分

由 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$ 可得点 A 为 OD 中点，可得 $D(2x_1,2y_1)$，

且有 $\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle OAB}}=\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle DAB}}=\dfrac{|EB|}{|BD|}=\dfrac{2}{5}$，

所以可得 $\overrightarrow{OE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OD}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2, \dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2\right)$，

即点 E 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2, \dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2\right)$， ………………………………………… 7 分

将点 E 代入椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，可得 $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{5}x_1+\dfrac{3}{5}x_2\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{5}y_1+\dfrac{3}{5}y_2\right)^2=1$.

化简后，得 $\dfrac{16}{25}\left(\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}\right)+\dfrac{9}{25}\left(\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}\right)+\dfrac{24}{25}\left(\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3}\right)=1$， ………………………… 8 分

由于点 A, B 分别满足 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1, \dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$，

代入上式可得 $\dfrac{x_1x_2}{4}+\dfrac{y_1y_2}{3}=0$，即 $3x_1x_2+4y_1y_2=0$. …………………………………………… 9 分

代入韦达定理可得 $2m^2=4k^2+3$，满足 $(*)$ 式， ………………………………………………………… 10 分

点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{m^2}{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{2k^2+\frac{3}{2}}{k^2+1}}=\sqrt{2-\dfrac{1}{2(k^2+1)}}$，

由于 $k^2\geqslant 0$，可得 $2(k^2+1)\geqslant 2, 0<\dfrac{1}{2(k^2+1)}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\leqslant\sqrt{2-\dfrac{1}{2(k^2+1)}}<\sqrt{2}$； …………………………………………………………… 11 分

当直线 l 的斜率不存在时，此时有 $x_1=x_2, y_1=-y_2$，代入 $3x_1x_2+4y_1y_2=0$，

可得 $3x_1^2-4y_1^2=0$，又 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，可得 $x_1=\pm\sqrt{2}$，

所以直线 l 的方程为 $x=\pm\sqrt{2}$，点 O 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.

故原点 O 到直线 l 的距离的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。