2023届湖南新高考教学教研联盟高三第一次联考

数学试卷

审校、制作：湖南炎德文化实业有限公司

由 长郡中学；衡阳市八中；永州市四中；岳阳县一中；湘潭县一中；湘西州民中；石门县一中；澧县一中；益阳市一中；桃源县一中；株洲市二中；麓山国际；郴州市一中；岳阳市一中；娄底市一中；怀化市三中；邵东市一中；洞口县一中 联合命题

命题学校：株洲市二中　审题学校：益阳市箴言中学

座位号＿＿＿＿　考生号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^3\leqslant 1\}$，$B=\{x|x+2>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-2,1]$　　B. $(0,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[0,1]$

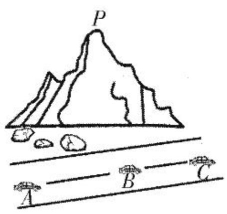
2. 若 $z_1=1-\mathrm{i}$，$z_2=\bar{z}_1(3+\mathrm{i})$（i 为虚数单位，$\bar{z}_1$ 是 z_1 的共轭复数），则 $|z_2|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列，且 $\frac{a_k}{b_k}$ 为定值，若 $a_1=144$，$a_7=24$，$b_1=96$，则 $b_4=$

A. 56　　B. 72　　C. 88　　D. 104

4. 逢山开路，遇水架桥，我国摘取了一系列高速公路“世界之最”，锻造出中国路、中国桥等一张张闪亮的“中国名片”. 如图，一辆汽车在一条水平的高速公路上直线行驶，在 A，B，C 三处测得道路一侧山顶 P 的仰角依次为 $30°$，$45°$，$60°$，其中 $AB=a$，$BC=b(0<a<3b)$，则此山的高度为



A. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2ab(a+b)}{3b-a}}$　　B. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3ab(a+b)}{3b-a}}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5ab(a+b)}{3b-a}}$　　D. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6ab(a+b)}{3b-a}}$

5. 某高校计划在今年暑假安排编号为 A,B,C,D,E,F 的 6 名教师，到 4 个不同的学校进行宣讲，每个学校至少安排 1 人，其中 B,D 必须安排在同一个学校. 则不同的安排方法共有

A. 96 种　　B. 144 种　　C. 240 种　　D. 384 种

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$ 上单调，且满足 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right)$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为

A. $\left(\frac{8}{3},\frac{10}{3}\right]$

B. $\left(\frac{8}{3},\frac{30}{11}\right]$

C. $\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$

D. $\left(\frac{5}{3},\frac{30}{11}\right]$

7. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在抛物线上(异于顶点)，$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$(点 O 为坐标原点)，过点 N 作直线 OM 的垂线与 x 轴交于点 P，则 $2|OP|-|MF|=$

A. 6　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=|\ln x|+1$，直线 $y=m(m>1)$ 与 $f(x)$ 的图象交于 A,B 两点，在 A,B 两点处分别作 $f(x)$ 的两条切线 l_1,l_2，这两条切线交于点 $P(a,b)$，则

A. $0<b<1$

B. $b>1$

C. $1<b<2$

D. $b\in\mathbf{R}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的有

A. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，$P(X\geqslant 4)=0.32$，则 $P(X\geqslant 0)=0.68$

B. 数据 4,7,6,5,3,8,9,10 的第 70 百分位数为 8

C. 回归分析中常用残差平方和来刻画拟合效果好坏，残差平方和越小，拟合效果越好

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据计算得到 $\chi^2=3.218$，依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验 $(x_{0.05}=3.841)$，可判断 X 与 Y 有关且犯错误的概率不超过 0.05

10. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$，则下列结论正确的是

A. a^2b+ab^2 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的最大值为 1

C. $\frac{a+2b+2}{ab}$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+2b}$ 的最小值为 3

11. 设 $k\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $l_1: x+ky=0$，和过定点 B 的动直线 $l_2: kx-y+3-k=0$ 交于点 P，M 是圆 $C:(x-2)^2+(y-4)^2=4$ 上的任意一点，则下列说法正确的有

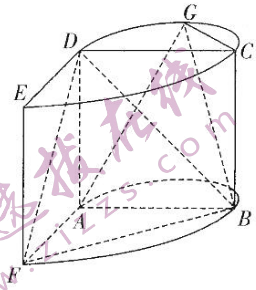
A. 直线 l_1 与圆 C 相切时 $k=\frac{4}{3}$

B. M 到 l_1 距离的最大值是 $2+2\sqrt{5}$

C. 直线 l_2 与圆 C 相交的最短弦长为 $2\sqrt{2}$

D. $|PA|+|PB|$ 的最大值为 $2\sqrt{10}$

12. 某同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒. 包装盒如图所示，是由等高的半个圆柱和$\frac{1}{4}$个圆柱拼接而成，其中四边形$ABCD$是边长为4的正方形，点G是弧CD上的动点，且C,E,D,G四点共面. 下列说法正确的有



A. 若点G为弧CD的中点，则平面$BFD\perp$平面BCG

B. 存在点G，使得$BG/\!/DF$

C. 存在点G，使得直线CF与平面BCG所成的角为60°

D. 当点G到平面BDF的距离最大时，三棱锥$G-BDF$外接球的半径$R=2\sqrt{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(1+x)+f(1-x)=0$，则$f(2023)=$________.

14. 已知向量$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$|\boldsymbol{b}|=2$，设与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$，若$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\sqrt{3}\boldsymbol{e}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=$______________.

15. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{5}{7}$，点$A$是椭圆上的任意一点，满足$AF_1\perp AF_2$，$\angle AF_1F_2$的平分线与$AF_2$相交于点$B$，则$F_1B$分$\triangle AF_1F_2$所得的两个三角形的面积之比$\frac{S_{\triangle BF_1A}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=$______________.

16. 在数字通信中，信号是由数字“0”和“1”组成的序列，“0，1数列”是每一项均为0或1的数列，设C是一个“0，1数列”，定义数列$f(C)$为数列C中每个0都变为“1，0，1”，每个1都变为“0，1，0”所得到的新数列. 例如数列C：0，1，则数列$f(C)$：1，0，1，0，1，0. 已知数列C_1：0，1，0，1，0，记数列$C_{k+1}=f(C_k)$，$k=1,2,3,\cdots$，则数列C_3的所有项之和为__________；数列C_n的所有项之和为__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\frac{b+c}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C$.

(1)求A的大小；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

18.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=1,2S_n=2na_n-n^2+n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)给定 $k\in\mathbf{N}^*$,记集合$\{n|k\leqslant a_n\leqslant 2^k,k\in\mathbf{N}^*\}$中的元素个数为 b_k,若 $b_1+b_2+\cdots+b_k\geqslant 2023$,试求 k 的最小值.

19.(本小题满分 12 分)

第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行,在保持原有 40 个大项目不变的前提下,增设了电子竞技和霹雳舞两个竞赛项目,国家体育总局为了深入了解各省在"电子竞技"和"霹雳舞"两个竞赛项目上的整体水平,随机选取了 10 个省进行研究,便于科学确定国家集训队队员,各省代表队人数如下表:

省代表队	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
电子竞技	45	51	27	38	57	19	26	47	34	29
霹雳舞	26	15	44	42	32	28	56	36	48	20

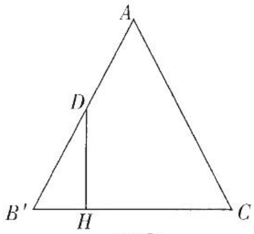
(1)从这 10 支省代表队中随机抽取 3 支,在抽取的 3 支代表队参与电子竞技的人数均超过 30 人的条件下,求这 3 支代表队参与霹雳舞的人数均超过 30 人的概率;

(2)若霹雳舞参与人数超过 40 人的代表队所在地可以成为国家队集训基地,现从这 10 支代表队中随机抽取 4 支,记 X 为选出代表队所在地可以成为国家队集训基地的个数,求 X 的分布列和数学期望;

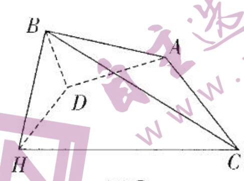
(3)某省代表队准备进行为期 3 个月的霹雳舞封闭训练,对太空步、空中定格、整体移动三个动作进行集训,且在集训中进行了多轮测试. 规定:在一轮测试中,这 3 个动作至少有 2 个动作达到"优秀",则该轮测试记为"优秀". 已知在一轮测试的 3 个动作中,甲队员每个动作达到"优秀"的概率均为$\frac{3}{4}$,每个动作互不影响且每轮测试互不影响. 如果甲队员在集训测试中获得"优秀"次数的平均值不低于 9 次,那么至少要进行多少轮测试?

20.(本小题满分 12 分)

如图①,已知$\triangle AB'C$是边长为 2 的等边三角形,D是AB'的中点,$DH\perp B'C$,如图②,将$\triangle B'DH$沿边DH翻折至$\triangle BDH$.



图①



图②

(1)在线段BC上是否存在点F,使得AF∥平面BDH?若存在,求$\dfrac{BF}{FC}$的值;若不存在,请说明理由;

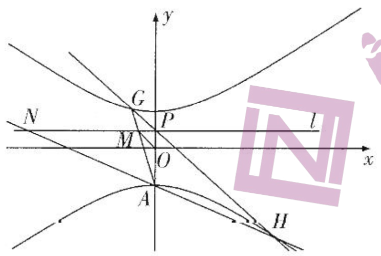
(2)若平面BHC与平面BDA所成的二面角的余弦值为$\dfrac{1}{3}$,求三棱锥$B-DCH$的体积.

21.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系xOy中,双曲线C:$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$,焦距为$2\sqrt{7}$.

(1)求C的方程;

(2)如图,点A为双曲线的下顶点,点P在y轴上(位于原点与上顶点之间),过P作x轴的平行线l,过P的另一条直线交双曲线于G,H两点,直线AG,AH分别与l交于M,N两点,若$\angle ANM+\angle AOM=\pi$,求点$P$的坐标.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=\ln x-\sqrt{x-a}(a\in\mathbf{R})$.若函数$f(x)$恰有两个不同的极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(1)求a的取值范围;

(2)是否存在实数a,使得$[f(x_1)-f(a)]^2=[f(x_2)]^2$成立?请说明理由.

2023届湖南新高考教学教研联盟高三第一次联考

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	D	C	B	A	B

1．A 【解析】∵$A=\{x|x^3\leqslant 1\}=\{x|x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x+2>0\}=\{x|x>-2\}$，

∴$A\cap B=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，故选A．

2．C 【解析】$z_2=\overline{z_1}(3+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=2+4\mathrm{i}$，所以$|z_2|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，故选C．

3．A 【解析】因为$\frac{a_k}{b_k}$为定值，所以$\frac{a_7}{b_7}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{144}{96}=\frac{3}{2}$，又因为$a_7=24$，所以$b_7=16$，

因为$\{b_n\}$为等差数列，所以$b_4=\frac{b_1+b_7}{2}=56$，故选A．

4．D 【解析】如图，设点P在地面上的正投影为点O，则

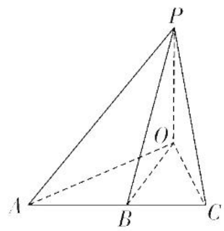
$\angle PAO=30°$，$\angle PBO=45°$，$\angle PCO=60°$，

设山高$PO=h$，则$AO=\sqrt{3}h$，$BO=h$，$CO=\frac{\sqrt{3}h}{3}$，

在$\triangle AOC$中，$\cos\angle ABO=-\cos\angle CBO$，

由余弦定理即有：$\frac{a^2+h^2-3h^2}{2ah}=-\frac{b^2+h^2-\frac{h^2}{3}}{2bh}$，整理得$h^2=\frac{3ab(a+b)}{2(3b-a)}$，

所以$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6ab(a+b)}{3b-a}}$，故选D．



5．C 【解析】将这6名教师分成四组，再分配到不同的学校．若教师人数依次为3，1，1，1，则不同的安排方法种数为：$C_4^1\times A_4^4=96$种；若教师人数依次为2，2，1，1，则不同的安排方法种数为：$C_4^2\times A_4^4=144$种，故不同的安排方法共有$96+144=240$种，故选C．

6．B 【解析】∵$f(x)$在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$上单调，$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$，$\frac{3\pi}{4}\in\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$，

∴$f(x)$的对称中心为$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，且$\frac{51\pi}{60}-\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{60}>\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}=\frac{5\pi}{60}$，

∴$\frac{T}{4}\geqslant\frac{11\pi}{60}$，即$T\geqslant\frac{11\pi}{15}$，即$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{11\pi}{15}$，∴$0<\omega\leqslant\frac{30}{11}$，

又∵$f(x)$的对称中心为$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，∴$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$，

∵$f(x)$在区间$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right)$上恰有5个零点，相邻两个零点之间的距离为$\frac{T}{2}$，五个零点之间即$2T$，六个零点之间即$\frac{5}{2}T$，∴只需$\frac{2\pi}{3}+2T<\frac{13\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{5}{2}T$即可，即$\frac{8}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$，

又∵$0<\omega\leqslant\frac{30}{11}$，∴$\frac{8}{3}<\omega\leqslant\frac{30}{11}$，故选B．

7．A 【解析】法一：依题意，设$M\left(\frac{y_0^2}{8},y_0\right)$，由$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$，得$N$为$OM$的中点且$N\left(\frac{y_0^2}{16},\frac{y_0}{2}\right)$，

则$k_{OM}=\frac{8}{y_0}$，易得直线OM的垂线NP的方程为$y-\frac{y_0}{2}=-\frac{y_0}{8}\left(x-\frac{y_0^2}{16}\right)$．

令$y=0$，得$x=\frac{y_0^2}{16}+4$，故$P\left(\frac{y_0^2}{16}+4,0\right)$，由抛物线的定义易知$|MF|=\frac{y_0^2}{8}+2$，

故 $2|OP|-|MF|=2\left(\frac{y_0^2}{16}+4\right)-\left(\frac{y_0^2}{8}+2\right)=6$，故选 A.

法二：特殊值法. 不妨设 $M(8,8)$，则 $N(4,4)$，则 $k_{OM}=1$，易得直线 OM 的垂线 NP 的方程为 $y-4=-(x-4)$. 令 $y=0$，得 $x=8$，故 $P(8,0)$，又 $|MF|=10$，故 $2|OP|-|MF|=16-10=6$. 故选 A.

8. B 【解析】设 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$ $(0<x_1<1<x_2)$，则 $f(x_1)=-\ln x_1+1$，$f(x_2)=\ln x_2+1$，

则 $-\ln x_1=\ln x_2$，即 $x_1x_2=1$，$f'(x_1)=-\frac{1}{x_1}$，$f'(x_2)=\frac{1}{x_2}$，

则切线 $l_1: y=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)-\ln x_1+1=-\frac{1}{x_1}x+2-\ln x_1$，

切线 $l_2: y=\frac{1}{x_2}(x-x_2)+\ln x_2+1=x_1x-\ln x_1$，

联立两切线方程得 $-\frac{1}{x_1}x+1=x_1x-1$，即有 $\left(\frac{1}{x_1}+x_1\right)x=2$，则 $a=x=\frac{2x_1}{x_1^2+1}$，

代入 l_2 方程解得 $b=\frac{2x_1^2}{x_1^2+1}-\ln x_1=\frac{2x_1^2}{x_1^2+1}-\frac{1}{2}\ln x_1^2$，设 $t=x_1^2\in(0,1)$，则 $b=\frac{2t}{t+1}-\frac{1}{2}\ln t$，

令 $g(t)=\frac{2t}{t+1}-\frac{1}{2}\ln t$，$t\in(0,1)$，则 $g'(t)=-\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}<0$，$g(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 单调递减，

所以 $g(t)>g(1)=1$，即 $b>1$，且 $t\to0$ 时，$b=g(t)\to+\infty$，故选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	ABC	AC	BC	AD

9. ABC 【解析】由 $P(X\geqslant4)=0.32$ 可知 $P(0\leqslant X\leqslant2)=P(2\leqslant X\leqslant4)=0.18$，故 A 正确；数据重排后如下：3，4，5，6，7，8，9，10 共 8 个，第 70 百分位数为第 6 个数，即为 8，故 B 正确；回归分析中残差平方和越小，拟合效果越好，故 C 正确；$\chi^2=3.218<3.841$，犯错误的概率会超过 0.05，故 D 错误. 故选 ABC.

10. AC 【解析】$\because a>0,b>0,a+b=1$.

对于 A，$a^2b+ab^2=ab(a+b)=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，故 A 正确；

对于 B，当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}>1$，故 B 错误；

对于 C，$\frac{a+2b+2}{ab}=\frac{a+2b+2(a+b)}{ab}=\frac{3a+4b}{ab}=\frac{3}{b}+\frac{4}{a}=\left(\frac{3}{b}+\frac{4}{a}\right)(a+b)=7+\left(\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}\right)\geqslant7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}$ 时取等号，故 C 正确；

对于 D，$\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+2b}=\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+2b}\right)\cdot\frac{1}{3}[(2a+b)+(a+2b)]=\frac{1}{3}\left[5+\left(\frac{a+2b}{2a+b}+\frac{4(2a+b)}{a+2b}\right)\right]\geqslant3$，但是当 $\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{4(2a+b)}{a+2b}$ 时，$a=0$ 不符合题意，故等号不成立，故 D 错误. 故选 AC.

11. BC 【解析】显然当 $k=0$ 时直线 l_1 也与圆 C 相切，故 A 错误；

直线 l_1 过的定点为 $A(0,0)$，当 $l_1\perp CA$ 时 C 到 l_1 的距离最大，最大值为 $|CA|=2\sqrt{5}$，此时 M 到 l_1 距离的最大值为 $2+2\sqrt{5}$，故 B 正确；

由圆的标准方程可得圆心为 $C(2,4)$，半径 $r=2$，直线 l_2 过的定点为 $B(1,3)$，当 $l_2\perp CB$ 时所得弦长最短，则 $k_{l_2}\cdot k_{l_{CB}}=-1$，又 $k_{l_2}=k$，$k_{l_{CB}}=1$，所以 $k=-1$，得 $l_2: x+y-4=0$，则圆心到直线 l_2 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$，故 C 正确；

由 $l_1: x+ky=0 \Rightarrow A(0,0)$，当 $k=0$ 时，$l_1: x=0$，$l_2: y=3$，有 $l_1\perp l_2$，当 $k\neq 0$ 时，$k_{l_1}=-\frac{1}{k}$，$k_{l_2}=k$，

则 $k_{l_1}k_{l_2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$，又点 P 是两直线的交点，所以 $PA\perp PB$，所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$，

法一：设 $\angle ABP=\theta$，则 $|PA|=\sqrt{10}\sin\theta$，$|PB|=\sqrt{10}\cos\theta$，因为 $|PA|\geqslant 0$，$|PB|\geqslant 0$，所以 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以

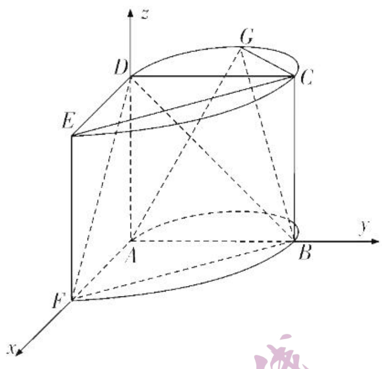
$|PA|+|PB|=\sqrt{10}(\sin\theta+\cos\theta)=2\sqrt{5}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{5}$，故 D 错误.

法二：因为 $(|PA|+|PB|)^2=|PA|^2+|PB|^2+2|PA||PB|\leqslant 2(|PA|^2+|PB|^2)=20$，

所以 $|PA|+|PB|\leqslant 2\sqrt{5}$，当且仅当 $|PA|=|PB|=\sqrt{5}$ 时等号成立，故 D 错误. 故选 BC.

12. AD 【解析】连接 EC，若点 G 为弧 CD 的中点，则 $\angle ECD=\angle GCD=45^\circ$，所以 $\angle ECG=90^\circ$，即 $EC\perp CG$，因为 $BF/\!/EC$，所以 $BF\perp CG$，又 $BF\perp BC$，$BC\cap CG=C$，所以 $BF\perp$ 平面 BCG，$BF\subset$ 平面 BFD，则平面 $BFD\perp$ 平面 BCG，故 A 正确；

假设存在点 G，使得 $BG/\!/DF$，则 B,G,D,F 四点共面，又该几何体上下两个底面平行，且 BF,DG 为平面 $BGDF$ 与这两个底面的交线，所以 $BF/\!/DG$，则四边形 $BGDF$ 为平行四边形，则有 $BF=DG$，这显然不成立，故 B 错误；



假设存在点 G，使得直线 CF 与平面 BCG 所成的角为 60°，以 A 为原点，$\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 方向为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系，则 $F(4,0,0)$，

$B(0,4,0)$，$C(0,4,4)$，设 $\angle GCD=\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $G(-4\sin\theta\cos\theta,4-4\cos^2\theta,4)$，

所以 $\overrightarrow{CF}=(4,-4,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$，

$\overrightarrow{BG}=(-4\sin\theta\cos\theta,-4\cos^2\theta,4)$，

设平面 BCG 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases} z=0, \\ -4x\sin\theta\cos\theta-4y\cos^2\theta=0, \end{cases}$

令 $y=\sin\theta$，则 $x=-\cos\theta$，即 $\boldsymbol{m}=(-\cos\theta,\sin\theta,0)$，

依题意 $|\cos\langle\overrightarrow{CF},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{-4\cos\theta-4\sin\theta}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\right|=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得 $\sin 2\theta=\frac{5}{4}$，这与 $\sin 2\theta\in[0,1]$ 矛盾，所以假设不成立，故 C 错误；

当点 G 到平面 BDF 的距离最大时，点 G 位于点 C，三棱锥 $G-BDF$，即三棱锥 $C-BDF$，即三棱锥 $F-BDC$，可将其补型为一个以 AF,AB,AD 为同一个顶点出发的三条侧棱的正方体，棱长为 4，其外接球半径 $R=2\sqrt{3}$，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0 【解析】函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，

在 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 中，令 $x=0$，有 $f(1)=0$，

在 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 中，用 $x+1$ 代替 x，有 $f(x+2)=-f(-x)=f(x)$，

所以 2 是 $f(x)$ 的一个周期，所以 $f(2023)=f(1)=0$.

14. $60^\circ\left(\text{或}\frac{\pi}{3}\right)$ 【解析】**法一：**因为向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α，因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\sqrt{3}\boldsymbol{e}$，则 $|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\sqrt{3}$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha=30^\circ$，又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta=2\alpha=60^\circ$.

法二：因为向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\sqrt{3}\boldsymbol{e}$，则 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta}}=\frac{4(1+\cos\theta)}{\sqrt{8(1+\cos\theta)}}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{3}$，即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=60^\circ$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$

的夹角为 $\theta=60^\circ$.

15. $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$（说明：若只填写一个值或者仅写对一个值不给分）

【解析】设 $|AF_1|=m$，$|AF_2|=n$，因为 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，所以 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，由勾股定理，得 $m^2+n^2=(2c)^2$，①

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}$，所以由椭圆的定义得 $m+n=2a=\frac{14c}{5}$，②

联立①②并化简得：$25n^2-70cn+48c^2=0$，显然点 A 不在坐标轴上，

若点 A 在第一或第四象限，

则 $n=\frac{6}{5}c$，$m=\frac{8}{5}c$，因为 F_1B 是 $\angle AF_1F_2$ 的平分线，所以 $\frac{S_{\triangle BF_1A}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\frac{AB}{BF_2}=\frac{m}{2c}=\frac{4}{5}$；

若点 A 在第二或第三象限，

则 $n=\frac{8}{5}c$，$m=\frac{6}{5}c$，因为 F_1B 是 $\angle AF_1F_2$ 的平分线，所以 $\frac{S_{\triangle BF_1A}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\frac{AB}{BF_2}=\frac{m}{2c}=\frac{3}{5}$.

16. 22　$\frac{5\cdot 3^{n-1}+(-1)^n}{2}$（第一空 2 分，第二空 3 分）

（说明：第二空也可以写成 $\begin{cases}\frac{5\cdot 3^{n-1}-1}{2}(n\text{ 为奇数})\\ \frac{5\cdot 3^{n-1}+1}{2}(n\text{ 为偶数})\end{cases}$）

【解析】C_1 中有 2 个 1，3 个 0；C_2 中有 8 个 1，7 个 0；C_3 中有 22 个 1，23 个 0，数列 C_3 的所有项之和为 $22\times1+23\times0=22$；

设数列 C_n 中 0 的个数为 a_n，1 的个数为 b_n，则 $a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=b_n+2a_n$，

法一：$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，且 $a_1+b_1=5$，所以 $\{a_n+b_n\}$ 是以 5 为首项，3 为公比的等比数列，

所以 $a_n+b_n=5\times3^{n-1}$，又因为 $a_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{2}$，所以 $b_{n+1}=-b_n+10\times3^{n-1}$，

即 $\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{3}\times\frac{b_n}{3^n}+\frac{10}{9}$，所以 $\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{b_n}{3^n}-\frac{5}{6}\right)$，即数列 $\left\{\frac{b_n}{3^n}-\frac{5}{6}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{6}$ 为首项，$-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，所以 $\frac{b_n}{3^n}-\frac{5}{6}=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，即 $b_n=\frac{5\cdot3^n}{6}+\frac{(-1)^n}{2}=\frac{5\cdot3^{n-1}+(-1)^n}{2}$，

数列 C_n 的所有项之和即为 1 的个数 b_n，即为 $\frac{5\cdot3^{n-1}+(-1)^n}{2}$.

法二：两式相加有 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，且 $a_1+b_1=5$，所以 $\{a_n+b_n\}$ 是以 5 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_n+b_n=5\times3^{n-1}$①；两式相减有 $a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$，且 $a_1-b_1=1$，所以 $\{a_n-b_n\}$ 是以 1 为首项，-1 为公比的等比数列，所以 $a_n-b_n=(-1)^{n-1}$②，

①－②得 $b_n=\frac{5\cdot3^{n-1}+(-1)^n}{2}$，数列 C_n 的所有项之和即为 1 的个数 b_n，即为 $\frac{5\cdot3^{n-1}+(-1)^n}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) $\because\frac{b+c}{a}=\cos C+\sqrt3\sin C$，$\therefore\sin B+\sin C=\sin A\cos C+\sqrt3\sin A\sin C$，

$\because\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$\therefore\cos A\sin C+\sin C=\sqrt3\sin A\sin C$，

$\therefore\sin C(1+\cos A)=\sqrt3\sin A\sin C$，$\because\sin C\neq0$，可得 $\sqrt3\sin A-\cos A=1$，……………… 3 分

$\therefore\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……………… 5 分

(2) $\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin B}=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B}+\frac{1}{2}$ ……………… 6 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+2\cos^2\frac{B}{2}-1}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}$. ………… 7分

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\ 0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\frac{B}{2}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$. ………… 8分

$\therefore\tan\frac{B}{2}\in(2-\sqrt{3},1)$，$\therefore\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\in(1,2+\sqrt{3})$，$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$.

$\therefore\frac{a+c}{b}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$. ………… 10分

18.【解析】(1)依题意 $2S_n=2na_n-n^2+n$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=2(n-1)a_{n-1}-(n-1)^2+n-1$，② ………… 1分

①②两式相减得 $2a_n=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+2-2n$，即 $(n-1)(a_n-a_{n-1}-1)=0$， ………… 3分

因为 $n\geqslant 2$，所以 $a_n-a_{n-1}-1=0$，即 $a_n-a_{n-1}=1$，

所以 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列， ………… 4分

又 $a_1=1$，故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$. ………… 5分

(2)依题意 $k\leqslant a_n\leqslant 2^k$，即 $k\leqslant n\leqslant 2^k$，因为 $k\in\mathbf{N}^*$，$2^k\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以满足不等式的正整数个数为 2^k-k+1，即 $b_k=2^k-k+1$， ………… 7分

$b_1+b_2+\cdots+b_k=(2^1+2^2+\cdots+2^k)-(1+2+\cdots+k)+k$

$=\frac{2(1-2^k)}{1-2}-\frac{k(k+1)}{2}+k=2^{k+1}+\frac{k-k^2}{2}-2$， ………… 9分

因为 $b_k=2^k-k+1>0$，所以 $b_1+b_2+\cdots+b_k$ 单调递增， ………… 10分

当 $k=10$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=2001<2023$，

当 $k=11$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{11}=4039>2023$， ………… 11分

所以 k 的最小值为11. ………… 12分

19.【解析】(1)由题可知10支代表队，参与"霹雳舞"的人数依次为26，15，44，42，32，28，56，36，48，20，参与"电子竞技"的人数依次为45，51，27，38，57，19，26，47，34，29，其中参与"电子竞技"的人数超过30人的代表队有6个，参与"霹雳舞"的人数超过30人，且"电子竞技"的人数超过30人的代表队有4个，记"这10支代表队中随机选取3支代表队参与"电子竞技"的人数均超过30人"为事件 A，"这10支代表队中随机选取3支代表队参与"霹雳舞"的人数均超过30人"为事件 B， ………… 1分

则 $P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，$P(AB)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$， ………… 3分

所以，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{5}$. ………… 4分

(2)参与"霹雳舞"人数在40人以上的代表队共4支，X 的所有可能取值为0，1，2，3，4，

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^0\cdot C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$， ………… 5分

$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$， ………… 6分

$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$. ………… 7分

所以 X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

………… 8分

所以 $E(X)=1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=\frac{8}{5}$(或写成 1.6). ………………………………… 9 分

(3)记“甲队员在一轮测试中获得‘优秀’”为事件 C,则 $P(C)=C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+C_3^3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{32}$, …… 10 分

由题意,甲队员在集训测试中获得“优秀”的次数服从二项分布 $B\left(n,\frac{27}{32}\right)$,

由题意 $\frac{27}{32}n\geqslant 9$,得 $n\geqslant\frac{32}{3}$, ………………………………… 11 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最小值为 11,故至少要进行 11 轮测试. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1)存在点 F 满足题意,且 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$,理由如下: ………………………………… 1 分

在图①中,取 $B'C$ 的中点 M,连接 AM,则 $AM/\!/DH$, ………………………………… 2 分

在图②中,$AM/\!/DH$,$AM\not\subset$平面 BDH,$DH\subset$平面 BDH,

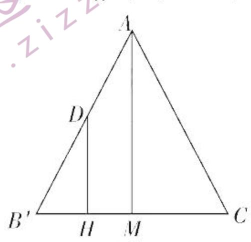
所以 $AM/\!/$平面 BDH,且 $\frac{HM}{MC}=\frac{1}{2}$; ………………………………… 3 分

在线段 BC 上取点 F 使 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$,

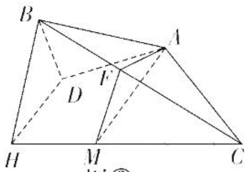
连接 MF,FA,则 $MF/\!/BH$,同理可得 $MF/\!/$平面 BDH, ………………………………… 4 分

又因为 $MF\cap AM=M$,所以平面 $AMF/\!/$平面 BDH,

又因为 $AF\subset$平面 AMF,所以 $AF/\!/$平面 BDH. ………………………………… 5 分

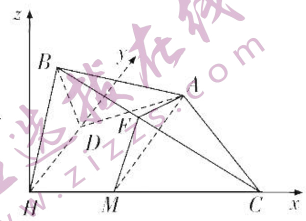


图①



图②

(2)在图②中,$DH\perp HC$,$DH\perp HB$,$HC\cap HB=H$,所以 $DH\perp$平面 BHC,



法一: 以 H 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $H(0,0,0)$,$A\left(\frac{1}{2},\sqrt{3},0\right)$,$C\left(\frac{3}{2},0,0\right)$,$D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, ……………… 6 分

设 $\angle BHC=\theta\in(0,\pi)$,则 $B\left(\frac{1}{2}\cos\theta,0,\frac{1}{2}\sin\theta\right)$,

$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2}\cos\theta,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\sin\theta\right)$,$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, ……………… 7 分

设平面 BDA 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{z}{2}\sin\theta=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{z}{2}\sin\theta=0,\\ x=-\sqrt{3}y,\end{cases}$

令 $y=1$,则 $x=-\sqrt{3}$,$z=\frac{\sqrt{3}(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$,即 $\boldsymbol{m}=\left(-\sqrt{3},1,\frac{\sqrt{3}(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$,

易知平面 BHC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$, ………………………………… 9 分

若平面 BHC 与平面 BDA 所成的二面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$,则 $\frac{1}{\sqrt{3+1+3\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}}=\frac{1}{3}$,

化简整理得:$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\sqrt{\frac{5}{3}}$, ………………………………… 10 分

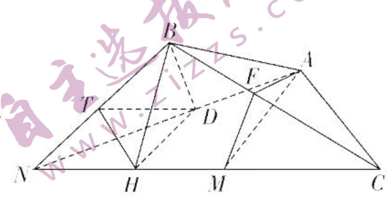
所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3}{5}}$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$,$\cos\theta=\frac{1}{4}$,所以 $B\left(\frac{1}{8},0,\frac{\sqrt{15}}{8}\right)$,

则三棱锥 $B-DCH$ 的高为$\frac{\sqrt{15}}{8}$， …………………………………………………… 11 分

又因为底面积 $S_{\triangle DCH}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，

所以三棱锥 $B-DCH$ 的体积为 $V_{B-DCH}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{5}}{64}$. …………………… 12 分

法二：延长 AD，CH 相交于点 N，事实上点 N 即为点 B'，



则平面 $BHC\cap$平面 $BDA=BN$，

过 H 作 $HT\perp BN$，垂足为 T，连接 DT， …………………………… 6 分

因为 $DH\perp$平面 BHC，所以 $DH\perp BN$，

又 $HT\cap DH=H$，所以 $BN\perp$平面 DTH，

即 $BN\perp DT$，所以$\angle DTH$ 即为平面 BHC 与平面 BDA 所成的二面角的平面角，

即 $\cos\angle DTH=\frac{1}{3}$，所以 $\tan\angle DTH=2\sqrt{2}$， …………………………………………………… 8 分

即 $\tan\angle DTH=\frac{DH}{TH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{TH}=2\sqrt{2}$，即 $TH=\frac{\sqrt{6}}{8}$， …………………………………………………… 9 分

又 $BH=NH=\frac{1}{2}$，所以 $BN=2NT=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

在$\triangle BNH$ 中，由等面积法可得点 B 到 NH 的距离为$\frac{\sqrt{15}}{8}$，

即三棱锥 $B-DCH$ 的高 $h=\frac{\sqrt{15}}{8}$，又$\triangle DCH$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}$， …………………………………… 11 分

所以三棱锥 $B-DCH$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{5}}{64}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)因为焦距为 $2\sqrt{7}$，所以 $c=\sqrt{7}$； ………………………………………………………… 1 分

又因为焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，所以 $b=\sqrt{3}$， ………………………………………………… 2 分

所以 $a^2=c^2-b^2=4$， ………………………………………………………………………………… 3 分

故 C 的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)由$\angle ANM+\angle AOM=\pi$，又$\angle MOP+\angle AOM=\pi$，即$\angle ANM=\angle MOP$，

故 $\tan\angle ANM=\tan\angle MOP=\frac{1}{\tan\angle OMP}$，即 $-k_{AN}=\frac{1}{-k_{OM}}$，所以 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$， …………………… 5 分

设 $G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，$P(0,t)$，

由题意可知 $A(0,-2)$，则直线 AG：$y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，直线 AH：$y=\frac{y_2+2}{x_2}x-2$，

因为 M 在直线 l 上，所以 $y_M=t$，代入直线 AG 方程，可知 $x_M=\frac{(t+2)x_1}{y_1+2}$，

故 M 的坐标为$\left(\frac{(t+2)x_1}{y_1+2},t\right)$，所以 $k_{OM}=\frac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}$， ……………………………………… 6 分

又 $k_{AN}=k_{AH}=\frac{y_2+2}{x_2}$，由 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，则$\frac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}\cdot\frac{y_2+2}{x_2}=1$，

整理可得$\frac{t+2}{t}=\frac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}$， …………………………………………………………… 8 分

当直线 GH 斜率不存在时，显然不符合题意；

故设直线 GH：$y=kx+t$，代入双曲线方程$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ 中，

可得$(3k^2-4)x^2+6ktx+3t^2-12=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{-6kt}{3k^2-4}$，$x_1x_2=\frac{3t^2-12}{3k^2-4}$， ………………… 9 分

又$(y_1+2)(y_2+2)=(kx_1+t+2)(kx_2+t+2)=k^2x_1x_2+k(t+2)(x_1+x_2)+(t+2)^2$

$=k^2\cdot\dfrac{3t^2-12}{3k^2-4}+k(t+2)\cdot\dfrac{-6kt}{3k^2-4}+(t+2)^2=\dfrac{-4(t+2)^2}{3k^2-4}$,

所以$\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}=\dfrac{\dfrac{-4(t+2)^2}{3k^2-4}}{\dfrac{3t^2-12}{3k^2-4}}=\dfrac{-4(t+2)^2}{3(t^2-4)}=\dfrac{-4(t+2)}{3(t-2)}(t+2\neq0)$, ………… 11 分

故$4t=6-3t$,即$t=\dfrac{6}{7}$,所以点P坐标为$\left(0,\dfrac{6}{7}\right)$. ………… 12 分

22.【解析】(1)$f(x)$的定义域为$\{x\mid x>0,x\geqslant a\}$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}=\dfrac{2\sqrt{x-a}-x}{2x\sqrt{x-a}}=\dfrac{-x^2+4x-4a}{2x\sqrt{x-a}(2\sqrt{x-a}+x)}(x>0,x>a)$, ………… 1 分

令$g(x)=-x^2+4x-4a$,则$g(x)$的对称轴为$x=2$,

①$a\leqslant0$时,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,此时$g(0)=-4a\geqslant0$,且$g(x)$在$(0,2)$递增,$(2,+\infty)$递减,

故$g(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点,

所以$f(x)$只有一个极值点,不符合题意; ………… 3 分

②$a>0$时,$f(x)$的定义域为$[a,+\infty)$,此时$g(a)=-a^2<0$,要使得$g(x)$有两个零点,

则需$\Delta=16-16a>0\Rightarrow0<a<1$,此时$g(a)<0,g(2)>0,g(4)=-4a<0$,

所以存在$x_1\in(a,2)$,使得$g(x_1)=0$,即$f'(x_1)=0$,

$x_2\in(2,4)$,使得$g(x_2)=0$,即$f'(x_2)=0$, ………… 4 分

当$x\in(a,x_1)$时,$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$递减,当$x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$递增,

当$x\in(x_2,+\infty)$时,$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$递减,所以$f(x)$有两个极值点,符合题意.

综上可得:$0<a<1$. ………… 5 分

(2)$[f(x_1)-f(a)]^2=[f(x_2)]^2\Leftrightarrow f(x_1)-f(a)=f(x_2)$或$f(x_1)-f(a)=-f(x_2)$,

由(1)可知,x_1,x_2是方程$x^2-4x+4a=0$的两根,

所以$x_1+x_2=4,x_1x_2=4a$,且$a<x_1<2<x_2<4$. ………… 6 分

(i)若$f(x_1)-f(a)=f(x_2)$,则$\ln x_1-\sqrt{x_1-a}-\ln a=\ln x_2-\sqrt{x_2-a}$,

而$\ln a=\ln\dfrac{x_1x_2}{4}=\ln x_1+\ln x_2-2\ln2,\sqrt{x_1-a}=\dfrac{x_1}{2},\sqrt{x_2-a}=\dfrac{x_2}{2}$,

所以$\ln x_1-\dfrac{x_1}{2}-\ln x_1-\ln x_2+2\ln2=\ln x_2-\dfrac{x_2}{2}\Rightarrow2\ln x_2+\dfrac{x_1-x_2}{2}-2\ln2=0$,

即$2\ln x_2-x_2+2-2\ln2=0$,令$h(x)=2\ln x-x+2-2\ln2,x\in(2,4)$,

则$h'(x)=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}<0$,所以$h(x)$递减,且$h(2)=0$,故$h(x)<0$,

即方程$2\ln x_2-x_2+2-2\ln2=0$无解,故舍去; ………… 9 分

(ii)若$f(x_1)-f(a)=-f(x_2)$,则$\ln x_1-\dfrac{x_1}{2}-\ln x_1-\ln x_2+2\ln2=-\ln x_2+\dfrac{x_2}{2}$

$\Leftrightarrow2\ln2=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$,矛盾,故舍去. ………… 11 分

综上可得,不存在实数a满足$[f(x_1)-f(a)]^2=[f(x_2)]^2$. ………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。