秘密★启用前

2023年山西省高考考前适应性测试
数学参考答案详解及评分说明

评分说明：

1. 考生如按其他方法或步骤解答，正确的，同样给分；有错的，根据错误的性质，参照评分说明中相应的规定评分。

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的，不给分；只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的，不给分。

A卷选择题答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】化简得 $A=\{x\mid x\geqslant 3,\text{或}x\leqslant -1\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，

$\therefore A\cap B=\{-2,-1\}$.

2. C

【解析】令 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$.

$\because z+\bar{z}=2$，$\therefore a=1$，$z=1+bi$，$\because\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$，$\therefore 1+b^2=2$.

解得 $b=\pm1$，$\therefore z=1\pm i$.

3. B

【解析】$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=2\sqrt{3}$.

4. B

【解析】由题可知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x\in\mathbf{Q},\\x^2,x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}.\end{cases}$ 所以 $f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=2$，$f(\sqrt{3})=3$，而 $f(x)=1$ 无解.

5. A

【解析】法1：$22^{22}=(20+2)^{22}=C_{22}^{0}\times20^{22}+C_{22}^{1}\times20^{21}\times2+C_{22}^{2}\times20^{20}\times2^2+\cdots+C_{22}^{21}\times20\times2^{21}+C_{22}^{22}2^{22}$. 对于 2^{22}，当 $n=1,2,3,4,5,\cdots$ 时，$2^n=2,4,8,16,32,\cdots$，其个位数以4为周期变化. $22\div4=5\cdots\cdots2$，所以 2^{22} 的个位数为4，故所求余数为4.

法2：直接观察 $22^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的个位数随 n 变化的规律求解.

法3：$22^{22}=(485-1)^{11}=C_{11}^{0}\times485^{11}+C_{11}^{1}\times485^{10}\times(-1)+C_{11}^{2}\times485^{9}\times(-1)^2+\cdots+C_{11}^{10}\times485^{1}\times(-1)^{10}+C_{11}^{11}(-1)^{11}$，可知 22^{22} 除以5的余数，即为 $C_{11}^{11}(-1)^{11}=-1$ 除以5的余数，故所求余数为4.

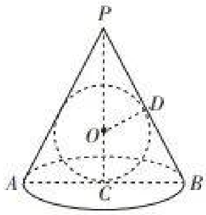
6. D

【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由 $f(x)=1$，得 $\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore \omega x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

令 $\omega x-\dfrac{\pi}{6}=t$，则 $\sin t=\dfrac{1}{2}$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 有三个根，$\therefore 2\pi+\dfrac{\pi}{6}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant3\pi-\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore \dfrac{7}{3}<\omega\leqslant3$.

7. C


(第7题答图)

【解析】设圆锥体积为V_1，底面半径为R，其内切球体积为V_2，半径为r，由题可得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{2}{1}$$，整理得：$R^2=2r^3$.①

如图，由$\triangle POD \backsim \triangle PBC$可得$\frac{OD}{BC}=\frac{PO}{PB}$，即$\frac{r}{R}=\frac{4-r}{\sqrt{16+R^2}}$，

两边平方得：$\frac{r^2}{R^2}=\frac{(4-r)^2}{16+R^2}$.②

将①代入②化简整理得$r^2-2r+1=0$，

$\therefore r=1$.

8. D

【解析】设直线l为曲线$y=f(x)$在点$\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$处的切线，$f'(x)=\frac{1}{x}$，

$\therefore l: y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即$l: y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$；

设直线l为曲线$y=g(x)$在点$\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$处的切线，$g'(x)=ax^{a-1}(x>0)$，

$\therefore l: y-x_2^a=ax_2^{a-1}(x-x_2)$，即$l: y=ax_2^{a-1}x+(1-a)x_2^a$，

由题得$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=ax_2^{a-1}, & ①\\ \ln x_1-1=(1-a)x_2^a, & ②\end{cases}$

注意到$x_1>0, x_2>0$，故有$a>0$，由①式得$\ln x_1=-\ln a-(a-1)\ln x_2$，

代入②式得$-\ln a-(a-1)\ln x_2-1=(1-a)x_2^a$，显然$a\neq 1$，整理得$\ln x_2-x_2^a=\frac{1+\ln a}{1-a}$.

记$h(x)=\ln x-x^a(a>0且a\neq 1)$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-ax^{a-1}=\frac{1-ax^a}{x}$，

当$x\in\left(0,\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)$时，$h'(x)>0$；当$x\in\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}},+\infty\right)$时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$在$\left(0,\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)$上单调递增，在$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}},+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)=-\frac{1+\ln a}{a}$，

$\therefore h\left(x_2\right)\leqslant h(x)_{\max}$，即$\frac{1+\ln a}{1-a}\leqslant-\frac{1+\ln a}{a}$，

化简得$\frac{1+\ln a}{a(1-a)}\leqslant 0$，解得$a\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup(1,+\infty)$.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. ACD

【解析】对于A，函数$f(x)$定义域为R，且$f(-x)=e^{\sin|(-x)|}+e^{|\sin(-x)|}=e^{\sin|x|}+e^{|\sin x|}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，即A正确；

对于B，当$x\geqslant1$，且$y\geqslant1$时，$x^2\geqslant1$，且$y^2\geqslant1$，所以$x^2+y^2\geqslant2$；反之$x^2+y^2\geqslant2$不一定有$x\geqslant1$，且$y\geqslant1$，比如$x=-1$且$y=-1$。因此"$x\geqslant1$，且$y\geqslant1$"是"$x^2+y^2\geqslant2$"的充分不必要条件，所以B错误；

对于C，"$\exists x\in R$，$x^2+2ax+1<0$"是假命题，则"$\forall x\in R$，$x^2+2ax+1\geqslant0$"是真命题，所以$\Delta=4a^2-4\leqslant0$，解得$-1\leqslant a\leqslant1$，所以C正确；

对于D，由$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$可得$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=3$，当$ab>0$时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$，所以D正确。

10. AD

【解析】对于选项A，$16\times80\%=12.8$，所以男生每周锻炼身体的平均时长的80%分位数是为第13项数据，即9.2，选项A正确；对于选项B，$(5\times2+6\times4+7\times4+8\times4+9\times2+0.1\times2+0.2\times3+0.3\times2+0.4\times2+0.5\times2+0.6\times2+0.7+0.8)\div16=117.9\div16=7.36875$，选项B错误；对于选项C，男生每周锻炼身体的平均时长大于9h的有4周，所以概率为$4\div16=0.25$，选项C错误；对于选项D，男生每周锻炼身体的平均时长分布在区间$(8,9]$内的共8个，女生为3个；男生每周锻炼身体的平均时长分布在区间$(7,10)$内的共13个，女生为10个；男生每周锻炼身体的平均时长的极差为3.8，女生为1.3，据此可知与男生相比，女生每周锻炼身体的平均时长波动性比较大，也可通过计算方差、标准差判断，选项D正确。

11. ABD

【解析】当$n=1$时，$\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$，$a_1=\frac{1}{2}$；

当$n\geqslant2$时，$\frac{1}{\sqrt{S_n}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{S_n-S_{n-1}}$，

平方，得$\frac{1}{S_n}+S_n-2=S_n-S_{n-1}$，

$\therefore\frac{1}{S_n}=2-S_{n-1}$，$S_n=\frac{1}{2-S_{n-1}}(n\geqslant2)$，选项A正确；

$S_n-1=\frac{1}{2-S_{n-1}}-1=\frac{S_{n-1}-1}{2-S_{n-1}}$，

$\therefore\frac{1}{S_n-1}=\frac{2-S_{n-1}}{S_{n-1}-1}=\frac{1}{S_{n-1}-1}-1$，$\frac{1}{S_n-1}-\frac{1}{S_{n-1}-1}=-1$，

$\therefore\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$是首项为$\frac{1}{S_1-1}=-2$，公差为$-1$的等差数列，选项B正确；

$\therefore\frac{1}{S_n-1}=-2+(n-1)\times(-1)=-(n+1)$，$n\in N^*$，

$\therefore S_n=\frac{n}{n+1}$，$n\in N^*$，

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}-\sqrt{S_n}\right)^2=\frac{1}{n(n+1)}$，选项C错误；

记$f(n)=4nS_1^2S_3^2\cdots S_{2n-1}^2$，

则$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{n+1}{n}S_{2n+1}^2=\dfrac{n+1}{n}\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2=\dfrac{(2n+1)^2}{4n(n+1)}=1+\dfrac{1}{4n(n+1)}>1$,

$\therefore f(n+1)>f(n)$，$f(n)$为递增数列，

$\therefore f(n)\geqslant f(1)=4a_1^2=1$，即$S_1^2S_3^2\cdots S_{2n-1}^2\geqslant\dfrac{1}{4n}$，选项D正确.

12. BD

【解析】设点$A(x_1,y_1)$，点$B(x_2,y_2)$，直线l的方程为$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+c$，其中$c^2=a^2+b^2$，

联立$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+c,\\ b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,\end{cases}$ 得$(b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy+3b^4=0$，

所以$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}$，$y_1y_2=\dfrac{3b^4}{b^2-3a^2}$.

由$\overrightarrow{AF_2}=7\overrightarrow{F_2B}$，得$y_1=-7y_2$，即$\dfrac{y_1}{y_2}=-7$，所以$\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}=-\dfrac{50}{7}$，即$\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-\dfrac{36}{7}$，

即$\dfrac{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{b^2-3a^2}\right)^2}{\dfrac{3b^4}{b^2-3a^2}}=\dfrac{4c^2}{b^2-3a^2}=-\dfrac{36}{7}$，整理得$4c^2=9a^2$，

即$2c=3a$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$，故A错误；

设点F_1到直线l的距离为h，则$\dfrac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot|AF_2|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|BF_2|\cdot h}=7:1$，故选项B正确；

由$e=\dfrac{3}{2}$，得$b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，$c=\dfrac{3}{2}a$，代入韦达定理并化简得$-6y_2=y_1+y_2=\dfrac{15\sqrt{3}a}{7}$，$y_2=-\dfrac{5\sqrt{3}a}{14}$，

$\therefore|BF_2|=\sqrt{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}|y_2|=\dfrac{5}{7}a$，$|AF_2|=7|BF_2|=5a$，

又$|AF_1|=|AF_2|+2a=7a$，$|BF_1|=|BF_2|+2a=\dfrac{19}{7}a$，

所以$\triangle AF_1F_2$的周长为$|AF_1|+|AF_2|+2c=7a+5a+3a=15a$，

$\triangle BF_1F_2$的周长为$|BF_1|+|BF_2|+2c=\dfrac{19}{7}a+\dfrac{5}{7}a+3a=\dfrac{45}{7}a$，

所以$\triangle AF_1F_2$与$\triangle BF_1F_2$周长之比为$\dfrac{15a}{\frac{45}{7}a}=7:3$，故C错误；

设$\triangle AF_1F_2$与$\triangle BF_1F_2$内切圆半径分别为r_1,r_2，

$\dfrac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot15a\cdot r_1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{45}{7}a\cdot r_2}=7$，$r_1:r_2=3:1$，故D正确.

B卷选择题答案

1. B　2. A　3. C　4. C　5. D　6. D　7. B　8. A　9. ABD　10. BD　11. ABC　12. BD

A、B卷非选择题答案

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 0.4；$\frac{4}{15}$

【解析】设H_i表示"第i次摸到红球"，B_i表示"第i次摸到白球"，L_i表示"第i次摸到蓝球"，$i=1,2$. 则$P(H_1)=\frac{4}{4+3+3}=0.4$.

第一次没有摸到红球第二次摸到红球包括第一次摸到白球第二次摸到红球，和第一次摸到蓝球第二次摸到红球，所以所求概率为$P(H_2|\overline{H_1})=P(B_1)P(H_2|B_1)+P(L_1)P(H_2|L_1)=\frac{3}{10}\times\frac{4}{9}\times2=\frac{4}{15}$.

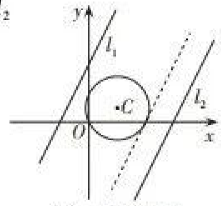
14. $(-\infty,-8]$

【解析】由图可知当圆C位于两直线l_1和l_2之间时，P点到直线l_1和l_2的距离之和均为l_1和l_2两平行直线间的距离，即点P到直线l_1和l_2的距离之和与点P的位置无关.

当直线l_2与圆相切时，$\frac{|4-1+m|}{\sqrt5}=\sqrt5$，

解得$m=-8$或$m=2$（舍去），

$\therefore m\le-8$，即m的取值范围为$(-\infty,-8]$.



（第14题答图）

15. $\sqrt7$

【解析】将图1中的$\triangle AA_1B$和$\triangle A_1BC$放置于同一个平面内，如图2所示，则$PA+PC\ge AC$.

∵直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC=2AA_1=2$，$AB=AC=\sqrt3$，

∴在Rt$\triangle A_1AB$中，$\angle ABA_1=30°$，$A_1B=2$.

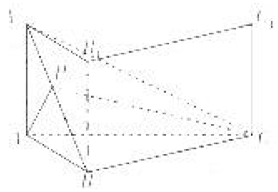
同理，在Rt$\triangle A_1AC$中，$A_1C=2$.

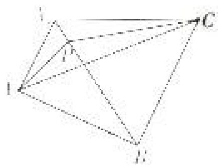
∴$\angle A_1BC=60°$，

∴在图2中，$\angle ABC=\angle ABA_1+\angle A_1BC=90°$，

∴$AC^2=AB^2+BC^2=7$，

∴$PA+PC$的最小值为$\sqrt7$.


（第15题答图1）


（第15题答图2）

16. 2

【解析】由$f(x+1)=-\frac{1}{2}f(x)+\frac{\sqrt3}{2}g(x)$，得$g(x)=\frac{2\sqrt3}{3}f(x+1)+\frac{\sqrt3}{3}f(x)$①，

$\therefore g(x+1)=\frac{2\sqrt3}{3}f(x+2)+\frac{\sqrt3}{3}f(x+1)$②.

将①，②代入$g(x+1)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{\sqrt3}{2}f(x)$，并整理得：

$f(x+2)=-f(x+1)-f(x)$，

$\therefore f(x+3)=-f(x+2)-f(x+1)=f(x)$.

$\therefore f(x)$是以3为周期的周期函数.

由①可知，$g(x)$也是以3为周期的周期函数，$\therefore g(2)=g(365)=-\sqrt3$.

由①得$\frac{2\sqrt3}{3}f(3)+\frac{\sqrt3}{3}f(2)=g(2)=-\sqrt3$，

又$\because f(x)=f(5-x)$，$\therefore f(3)=f(2)$，解得$f(3)=f(2)=-1$，

$\therefore f(1)=f(4)=-f(3)-f(2)=2$.

注意到$f(x+2)+f(x+1)+f(x)=0$，$2023=3\times674+1$，

$\therefore \sum_{k=1}^{2023}f(k)=f(1)=2$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\begin{cases}a_1q^3-a_1=7,\\a_1^2q^3=8,\end{cases}$ ……………………………… 2分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-8,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ ……………………………… 4分

又∵数列$\{a_n\}$是正项等比数列，

$\therefore a_1=1, q=2, a_n=2^{n-1}$. ……………………………… 5分

(2)若选①：$b_n=(2n-1)2^{n-1}$， ……………………………… 6分

$S_n=1\times2^0+3\times2^1+\cdots+(2n-1)2^{n-1}$， ……………………………… 7分

$2S_n=1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-1)2^n$，

$\therefore -S_n=1\times2^0+2\times(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)2^n$

$=1+2\times\dfrac{2-2^{n-1}\times2}{1-2}-(2n-1)2^n$

$=(3-2n)2^n-3$， ……………………………… 9分

$\therefore S_n=(2n-3)2^n+3$. ……………………………… 10分

若选②：$b_n=\dfrac{1}{(2n+1)\cdot\log_2 2^{2n-1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$， ……………………………… 7分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$. ……………………………… 10分

18. 解：(1)∵ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，∴ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{7}{16}$，即$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{9}{16}<0$.

∵θ为$\triangle ABD$的内角，所以$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$. ……………………………… 2分

又$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}$，所以$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{5}{4}$，

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}+5}{8}$. ……………………………… 4分

$\therefore \triangle ABD$的面积为：$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\dfrac{\sqrt{7}+5}{8}=\dfrac{\sqrt{7}+5}{2}$. ……………………………… 5分

(2)由(1)得$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}-5}{8}$，

$BC^2=BD^2=AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\theta$

$=2^2+4^2-2\times4\times2\times\dfrac{\sqrt{7}-5}{8}=30-2\sqrt{7}$. ……………………………… 6分

设$\angle ABD=\alpha$，由正弦定理得：$\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{BD}{\sin\theta}$，即$\sin\alpha=\dfrac{2\sin\theta}{BD}$，

6
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

所以$\cos\angle ABC=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{2\sin\theta}{BD}$. ………………………………………… 8分

$\triangle ABC$中,由余弦定理得:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$

$=16+\left(30-2\sqrt{7}\right)-2\times4\times BD\times\left(-\dfrac{2\sin\theta}{BD}\right)$

$=46-2\sqrt{7}+16\sin\theta$

$=46-2\sqrt{7}+16\times\dfrac{\sqrt{7}+5}{8}=56$, ………………………………………… 11分

所以$AC=2\sqrt{14}$. ………………………………………… 12分

19. 解:(1)从12组数据中任选两组,选法数为:C_{12}^2; ………………………………………… 1分

选取的2组数据恰好是相邻的2天,选法数为:11; ………………………………………… 2分

所以所求概率为$P=\dfrac{11}{C_{12}^2}=\dfrac{1}{6}$. ………………………………………… 3分

(2)设剩下的10组数据分别为$(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_{10},v_{10})$.

$\sum\limits_{i=1}^{10}u_iv_i=\sum\limits_{i=1}^{12}x_iy_i-10\times21-10\times22=2965-430=2535$; ………………………………………… 5分

$\bar{u}=\dfrac{1}{10}\left(\sum\limits_{i=1}^{12}x_i-20\right)=10.8$, $\bar{v}=\dfrac{1}{10}\left(\sum\limits_{i=1}^{12}y_i-43\right)=22.7$

$10\bar{u}\bar{v}=10\times10.8\times22.7=2451.6$; ………………………………………… 6分

$\sum\limits_{i=1}^{10}u_i^2=\sum\limits_{i=1}^{12}x_i^2-2\times10^2=1394-200=1194$; ………………………………………… 7分

$10\bar{u}^2=10\times10.8^2=1166.4$; ………………………………………… 8分

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}u_iv_i-10\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{10}u_i^2-10\bar{u}^2}=\dfrac{2535-2451.6}{1194-1166.4}\approx3.0$. ………………………………………… 10分

所以$\hat{a}=\bar{v}-\hat{b}\bar{u}=22.7-3.0\times10.8=-9.7\approx-10$.

所以所求回归方程为$\hat{y}=3x-10$. ………………………………………… 11分

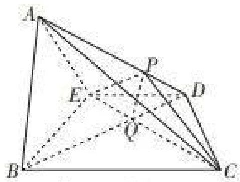
(3)当$x=10$时,$\hat{y}=20$.

因为$21-20=1<2$;$22-20=2$,

所以根据所给的研究方案,可以判断(2)中所得的线性回归方程是可靠的. ………………………………………… 12分

官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

20. 解：(1)如图1，连接 BD 与 CE 交于点 Q，连接 PQ，由题可得 $DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，



(第20题答图1)

$\therefore \frac{DQ}{BQ}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$.

又 $\because AP=2PD$，$\therefore \frac{DP}{PA}=\frac{DQ}{QB}=\frac{1}{2}$，…………………………………… 2分

$\therefore AB//PQ$.

$\because PQ\subset$ 平面 PEC，$AB\not\subset$ 平面 PEC，$\therefore AB//$ 平面 PEC. …………………………………… 4分

(2)法一：连接 A 点与 BE 的中点 O，过点 O 作 BE 的垂线与 BC 交于点 M，易知 M 为 BC 的中点.

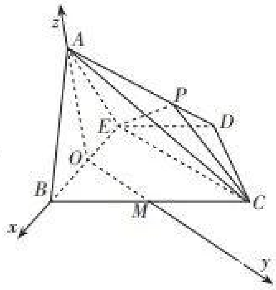
由已知可得 $AE=AB$，$\therefore AO\perp BE$.

$\because$ 平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $ABE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，$AO\subset$ 平面 ABE，

$\therefore AO\perp$ 平面 $BCDE$.

$\because OM\subset$ 平面 $BCDE$，$\therefore AO\perp OM$.

以 O 为原点建立空间直角坐标系如图2所示. …………………………………… 5分



(第20题答图2)

易知 $BE=CE=2$，$OA=OB=OE=OM=1$.

所以 $A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(-1,2,0)$，$D(-2,1,0)$，$E(-1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,0)$，

设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}=(-2\lambda,\lambda,-\lambda)$，则点 $P(-2\lambda,\lambda,1-\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{PE}=(2\lambda-1,-\lambda,\lambda-1)$. …………………………………… 7分

设平面 AEC 与平面 PEC 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)\cdot(-1,0,-1)=0,\\ (x_1,y_1,z_1)\cdot(-1,2,-1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1-z_1=0,\\ -x_1+2y_1-z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，得 $y_1=0$，$z_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x_2,y_2,z_2)\cdot(2\lambda-1,-\lambda,\lambda-1)=0,\\ (x_2,y_2,z_2)\cdot(0,-2,0)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(2\lambda-1)x_2-\lambda y_2+(\lambda-1)z_2=0,\\ -2y_2=0,\end{cases}$ 可得 $y_2=0$，

令 $x_2=\lambda-1$，则 $z_2=1-2\lambda$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(\lambda-1,0,1-2\lambda)$. …………………………………… 8分

由题知可令 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda-1-1+2\lambda=0$，

$\therefore \lambda=\frac{2}{3}$，…………………………………… 10分

即当点 P 满足 $AP=\frac{2}{3}AD$ 时，平面 AEC 与平面 PEC 的夹角为 $90°$.

此时，$V_{C-APE}=\frac{2}{3}V_{C-ADE}=\frac{2}{3}V_{A-CDE}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times S_{\triangle CDE}\times OA\right)=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{2}{9}$. ……………… 12分

法二：由(1)：当 $AP=2PD$ 时，$PQ//AB$.

$\because AB\perp AE$，$\therefore AE\perp PQ$. …………………………………… 5分

由已知得，在矩形 $ABCD$ 中，E 为 AD 的中点，$AB=AE=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore DE=DC=\frac{1}{2}AD$，$\therefore \angle AEB=\angle DEC=45°$，$\therefore \angle BEC=90°$，即 $CE\perp BE$. …………………………………………… 7分

又 $\because$ 平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $ABE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，$CE\subset$ 平面 $BCDE$，

$\therefore CE\perp$ 平面 ABE.

$\because AE\subset$ 平面 ABE，

$\therefore CE\perp AE$. …………………………………………………………………………………………… 8分

又 $\because CE\cap PQ=Q$，$CE\subset$ 平面 PEC，$PQ\subset$ 平面 PEC，

$\therefore AE\perp$ 平面 PEC.

$\because AE\subset$ 平面 AEC，

$\therefore$ 平面 $AEC\perp$ 平面 PEC，即当 $AP=2PD$ 时，平面 AEC 与平面 PEC 的夹角为 $90°$. ………………………… 10分

此时，$V_{C-APE}=\frac{2}{3}V_{C-ADE}=\frac{2}{3}V_{A-CDE}$

$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times S_{\triangle CDE}\times OA\right)=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{2}{9}$. …………………………………… 12分

21. 解：(1) $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{\ln x}{x}+1+\frac{1}{x}=\frac{x-\ln x+1}{x}$. ………………………………… 2分

记 $h(x)=x-\ln x+1$，$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………… 4分

故 $h(x)\geq h(1)=2>0$，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 是增函数. ………………………………………………………………………………………… 6分

(2) $g(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$g'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$.

①当 $a=0$ 时，$g(x)=(x-1)e^x$ 有唯一零点 $x=1$，符合题意； ……………………………………………… 7分

②当 $a<0$ 时，$e^x-a>0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$g(x)_{\min}=g(0)=a^2-1$，

若 $a<-1$，则 $g(x)\geq g(0)>0$，$g(x)$ 无零点，不符题意；

若 $a=-1$，$g(x)$ 有唯一零点 $x=0$，符合题意；

若 $-1<a<0$，则 $g(0)=a^2-1<0$，又 $g(1)=a^2-\frac{1}{2}a>0$，

$x<-1$ 时，$(x-1)e^x>x-1>2x$，$a^2>0$，$\therefore\ g(x)>2x-\frac{ax^2}{2}=\frac{x}{2}(4-ax)$，$\therefore\ g\left(\frac{4}{a}\right)>0$，

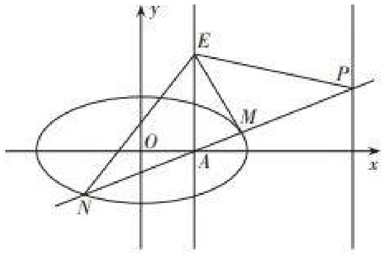
故 $g(x)$ 有两个零点，不符题意； ………………………………………………………………………… 9分

③当 $0<a<1$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln a,0)$ 上单调递减，又 $g(\ln a)=a(\ln a-1)-\frac{a(\ln a)^2}{2}+a^2=af(a)<af(1)=0$，

$x>1$ 时，易证 $e^x>x^2$，故 $g(x)>(x-1)x^2-\frac{ax^2}{2}=x^2\left(x-1-\frac{a}{2}\right)$，故 $g\left(\frac{a}{2}+1\right)>0$，$\therefore\ g(x)$ 有唯一零点，符合题意； …………………………………………………………………………………………………… 11分

综上，a 的取值范围为 $\{-1\}\cup[0,1)$. ……………………………………………………………………… 12分

22. 解：(1)设点$M\left(x_1,y_1\right)$，其中$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$-2\leqslant x_1\leqslant 2$，且$x_1\neq 1$，则



（第22题答图）

$|AM|=\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+y_1^2}$

$=\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+b^2\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{4}\right)x_1^2-2x_1+b^2+1}$，…………………………………… 2分

由$|AM|\geqslant 1$，得$\left(1-\frac{b^2}{4}\right)x_1^2-2x_1+b^2=\left(x_1-2\right)\left[\left(1-\frac{b^2}{4}\right)x_1-\frac{b^2}{2}\right]\geqslant 0$. …………………………………… 4分

$\because x_1\leqslant 2, 0<b<2$，$\therefore x_1-2\leqslant 0, 1-\frac{b^2}{4}>0$. $\therefore \left(1-\frac{b^2}{4}\right)x_1-\frac{b^2}{2}\leqslant 0, x_1\leqslant\frac{2b^2}{4-b^2}$.

只需$2\leqslant\frac{2b^2}{4-b^2}$. 又$\because 0<b<2$，$\therefore \sqrt{2}\leqslant b<2$.

$\therefore b$的取值范围是$\left[\sqrt{2},2\right)$. …………………………………………………………………… 6分

(2)k_1,k_3,k_2或k_2,k_3,k_1成等差数列，证明如下：…………………………………………………… 7分

若$b=1$，则C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，设点$E(1,t)$，$t\neq 0$.

①若直线l斜率为0，则点$P(4,0)$，不妨令点$M(2,0)$，$N(-2,0)$，则$k_1=-t$，$k_2=\frac{t}{3}$，$k_3=-\frac{t}{3}$，此时k_1,k_2,k_3的任意排列k_1,k_2,k_3均不成等比数列，k_1,k_3,k_2或k_2,k_3,k_1成等差数列. ………………………………………… 8分

②若直线l斜率不为0，设直线l：$x=my+1(m\neq 0)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，易知点$P\left(4,\frac{3}{m}\right)$.

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$\left(m^2+4\right)y^2+2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$. ………………………………………………………… 10分

因为$k_1=\frac{y_1-t}{x_1-1}$，$k_2=\frac{y_2-t}{x_2-1}$，$k_3=\frac{\frac{3}{m}-t}{3}=\frac{3-mt}{3m}$，

所以$k_1+k_2=\frac{y_1-t}{x_1-1}+\frac{y_2-t}{x_2-1}=\frac{y_1-t}{my_1}+\frac{y_2-t}{my_2}$

$=\frac{y_2\left(y_1-t\right)+y_1\left(y_2-t\right)}{my_1y_2}=\frac{2y_1y_2-t\left(y_1+y_2\right)}{my_1y_2}$

$=\frac{\frac{-6}{m^2+4}+\frac{2mt}{m^2+4}}{\frac{-3m}{m^2+4}}=\frac{6-2mt}{3m}=2k_3$，

$\therefore k_1,k_3,k_2$或k_2,k_3,k_1成等差数列.

综上，k_1,k_3,k_2或k_2,k_3,k_1成等差数列. ………………………………………………………… 12分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。