

秘密 ★ 启用前

## 2023 年阳泉市高三年级第三次模拟测试试题

# 数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡相应的位置.
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效.
3. 考试结束后, 将答题卡交回.
4. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分.

一、单项选择题:(本大题 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合  $A = \{x \mid \ln(x-2) < 0\}$ ,  $B = \{x \mid 5-2x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{x \mid 2 < x < \frac{5}{2}\}$     B.  $\{x \mid \frac{5}{2} < x < 3\}$     C.  $\{x \mid 1 < x < \frac{5}{2}\}$     D.  $\{x \mid 1 < x < 2\}$

2. 已知复数  $z$  是方程  $x^2 - 2x + 2 = 0$  的一个根, 则  $|z| =$

- A. 1    B. 2    C.  $\sqrt{2}$     D.  $\sqrt{3}$

3. 函数  $f(x) = \log_2 x + x^2 + m$  在区间  $(1, 2)$  存在零点, 则实数  $m$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, -5)$     B.  $(-5, -1)$     C.  $(1, 5)$     D.  $(5, +\infty)$

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ . 若  $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ , 则  $\frac{\lambda}{\mu} =$

- A.  $\frac{1}{3}$     B.  $\frac{1}{2}$     C. 2    D. 3

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

5. 米斗是我国古代称量粮食的量器,是官仓、粮栈、米行及地主家里必备的用具,其外形近似一个正四棱台.米斗有着吉祥的寓意,是丰饶富足的象征,带有浓郁的民间文化韵味,如今也成为了一种颇具意趣的藏品.已知一个斗型工艺品上下底面边长分别为2和4,侧棱长为 $2\sqrt{5}$ ,则其外接球的表面积为



- A.  $4\sqrt{2}\pi$       B.  $4\sqrt{10}\pi$       C.  $32\pi$       D.  $40\pi$

6. 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 经过点 $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ,则

- A.  $a^2 + b^2 \leq 1$       B.  $a^2 + b^2 \geq 1$       C.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 1$       D.  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1$

7. 已知抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点为 $F$ ,准线为 $l$ ,过 $F$ 的直线与抛物线交于点 $A, B$ ,与直线 $l$ 交于点 $D$ ,若 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 1)$ 且 $|\overrightarrow{BD}| = 4$ ,则 $\lambda$ 等于

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 1$ ,若实数 $a, b, c$ 使得 $af(x) - bf(x+c) = 3$ ,对任意的实数 $x$ 恒成立,则 $2a + b - \cos c$ 的值为

- A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C.  $\frac{3}{2}$       D. 2

二、多项选择题:(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对得5分,部分选对得2分,有错选得0分.)

9. 设无穷数列 $\{a_n\}$ 为正项等差数列且其前 $n$ 项和为 $S_n$ ,若 $S_{2023} = 2023$ ,则下列判断正确的是

- A.  $a_{1012} = 1$       B.  $a_{1013} \geq 1$   
C.  $S_{2022} > 2022$       D.  $S_{2024} \geq 2024$

10. 已知方程 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ ,其中 $A \geq B \geq C \geq D \geq E \geq F$ ,现有四位同学对该方程进行了判断,提出了四个命题,其中真命题有:

- A. 可以是圆的方程      B. 一定不能是抛物线的方程  
C. 可以是椭圆的标准方程      D. 一定不能是双曲线的标准方程

11. 设  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $\sin A = \cos B = \tan C$ , 则下列说法正确的是

- A.  $A + B = \frac{\pi}{2}$       B.  $2A + C = \frac{3\pi}{2}$       C.  $a > b$       D.  $c > b$

12. 已知正四面体  $A-BCD$  的棱长为 2,  $M, N$  分别为  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的重心,  $P$  为线段  $CN$  上一点, 则下列结论正确的是

- A. 若  $AP + BP$  取得最小值, 则  $CP = PN$   
 B. 若  $CP = 3PN$ , 则  $DP \perp$  平面  $ABC$   
 C. 若  $DP \perp$  平面  $ABC$ , 则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为  $\frac{27}{2}\pi$   
 D. 直线  $MN$  到平面  $ACD$  的距离为  $\frac{\sqrt{6}}{9}$

三、填空题: (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知  $\sin(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 且  $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ , 则  $\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

14. 在国际自然灾害中, 中国救援力量为挽救生命做出了重要贡献, 完美地展示了国家形象, 增进了国际友谊, 多次为祖国赢得荣誉. 某国际救援团队拥有 6 个医疗小组和 8 个抢险小组, 现分别去两个受灾点执行救援任务, 每个救援点至少需要 2 个医疗小组和 4 个抢险小组, 则不同的分配方式一共有  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$  种. (用数字作答)

15. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = nC_{10}^n (\frac{2}{3})^n (\frac{1}{3})^{10-n}$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{10} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

16. 已知  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x < 0 \\ \frac{x}{e^x}, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的不等式  $4ef^2(x) - af(x) + \frac{1}{e} = 0$  恰好有 6 个

不同的实数解, 则  $a$  的取值范围是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

四、解答题: (本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题 10 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3, 2a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 1$ .

(1) 记  $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{ \frac{1}{b_n b_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和.

18. (本小题 12 分) 已知  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b^2 + c^2 = a^2 - bc$ .

(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $b \sin A = 4 \sin B$ , 且  $\lg b + \lg c \geq 1 - 2 \cos(B + C)$ , 求  $\triangle ABC$  面积的取值范围.

19. (本小题 12 分) 万众瞩目的“第二十届上海汽车工业展览会”于 2023 年 4 月 18 日在国家会展中心开幕, 新能源车倍受关注, 其中百万级国产豪华 SUV 比亚迪仰望 U8 最为夺目, 车辆爱好者纷纷下单预定. 比亚迪公司快速启动生产线进行试产, 试产期间同步进行车辆检测, 检测包括智能检测与人工抽检. 智能检测在生产线上自动完成, 包含安全检测、电池检测、性能检测等三项指标, 人工抽检仅对智能检测三项指标均达标的产品进行抽样检测, 且仅设置一个综合指标, 四项指标均达标的产品才能视为合格品. 已知试产期的车辆, 智能检测三项指标的达标率为  $\frac{99}{100}, \frac{98}{99}, \frac{97}{98}$ , 设人工抽检的综合指标不达标率为  $p (0 < p < 1)$ .

(1) 求一辆汽车智能检测不达标的概率;

(2) 人工抽检 30 辆汽车, 记恰有 1 辆不达标的概率为  $\varphi(p)$ , 求  $\varphi(p)$  的极大值点  $p_0$ ;

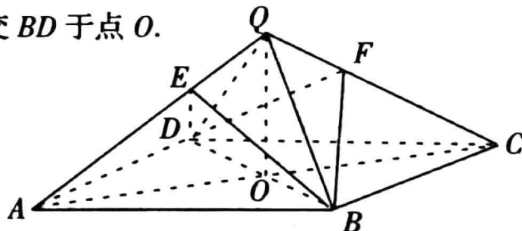
(3) 若车辆的合格率不超过 96%, 则需对生产工序进行改良. 以 (2) 中确定的  $p_0$  作为  $p$

的值, 判断比亚迪公司是否需要对生产工序进行改良.

20. (本小题 12 分) 如图, 在四棱锥  $Q-ABCD$  中, 点  $E, F$  分别在棱  $QA, QC$  上, 且三棱锥  $E-ABD$  和  $F-BCD$  均是棱长为 2 的正四面体,  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ .

(1) 求证:  $OQ \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 求平面  $ADQ$  与平面  $BCF$  夹角的余弦值.



21. (本小题 12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点为  $A$ ,  $P$  为  $C$  上一点,  $O$  为原点,

$|PA| = |PO|$ ,  $\angle APO = 90^\circ$ ,  $\triangle APO$  的面积为 1.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $B$  为  $C$  的右顶点, 过点  $(1, 0)$  且斜率不为 0 的直线  $l$  与  $C$  交于  $M, N$  两点,

证明:  $3 \tan \angle MAB = \tan \angle NBA$ .

22. (本小题 12 分) 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2 + 2ax - 1$ , 其中  $a$  为常数,  $e$  为自然对数底数,

若函数  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ .

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 证明:  $\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1} > 2$ .

高三数学试题 第 4 页 (共 4 页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

