2023 年茂名市高三级第一次综合测试

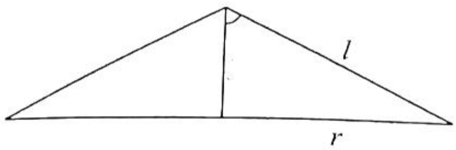
数学参考答案

一、单选题：

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	A	D	C	C	B	D

4.【解析】将 2 个 8 插空放入不相邻的 5 个空位（4 个 6 之间有 5 个空位）中，$C_5^2=10$

5.【解析】如图所示为该圆锥轴截面，设顶角为 α，



因为其轴截面（过圆锥旋转轴的截面）是腰长为 $2\sqrt{3}\text{m}$，面积为 $3\sqrt{3}\text{m}^2$ 的等腰三角形，

所以 $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\sin\alpha=3\sqrt{3}$，解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

由 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 得，$h=l\cos\frac{\alpha}{2}=2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$r=l\sin\frac{\alpha}{2}=2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=3$，

则上半部分的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi\text{m}^3$，

下半部分体积为 $\pi r^2h=18\pi$

蒙古包的体积为 $(18+3\sqrt{3})\pi\text{m}^3$

6.【解析】对于选项A，$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$，$\therefore T=\pi$

选项 B: $\sin x\neq0$ 且 $\cos x\neq0$, $f(x)=\frac{1-(1-2\sin^2x)}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sin^2x}{2\sin x\cos x}=\tan x\ \therefore T=\pi$

对于选项C，$f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos x$，$\therefore T=2\pi$

对于选项D，$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$\therefore T=\pi$

7.【解析】$a=\ln4-\frac{6}{5},b=\ln3-1,c=\ln5-\frac{8}{6}$,

故可构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$, $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$, 所以 $f(3)<f(4)<f(5)$

8.【解析】当 $PC \perp CD$ 时，三棱锥 $P-ACD$ 的表面积取最大值，$PD=2\sqrt{2}$，三棱锥 $P-ACD$ 的外接球的半径为 $R=\sqrt{2}$，外接球体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9	10	11	12
ACD	ACD	ABD	BC

10. 【解析】由题意得，$f(x)$的图像关于$(1,0)$中心对称，故 A 正确；

由 $f(-x)=f(x)$, 且$f(-x)=-f(2+x)$得 $f(x)=f(-x)=-f(2+x)\Rightarrow f(x)$的周期为 4，故 B 错误；

$\because f(1)=0 \quad \therefore f(-1)=0$，故 C 正确；

$\because f(x)$的周期为4, $\therefore f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，故 D 正确

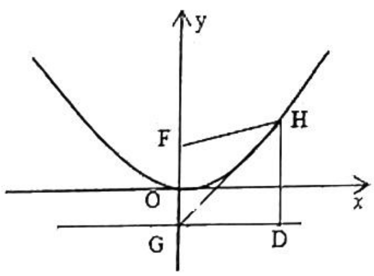
11.【解析】A 选项：由抛物线 C 的定义知 A 是正确的；

B 选项：由 $y'=\frac{1}{2}x$，切线方抛物线 C 在点 $(-2,1)$ 处的切线斜率为 -1，切线方程为 $x+y+1=0$；

C 选项：顶点在原点 O 的正三角形与抛物线相交与 A、B 两点,这个正三角形的边长为 $4\sqrt{3}p$，ΔOAB 的周长为 $24\sqrt{3}$，C 错；

D 选项：F 为抛物线的焦点，过 H 作 HD 垂直抛物线 C 的准线 $y=-1$ 于点 D，

如图



由抛物线的定义知，$t=\frac{|HG|}{|HF|}=\frac{|HG|}{|HD|}=\frac{1}{\sin\angle HGD}$

当 t 取最大值时，$\angle HGD$ 取最小值，（正弦函数的单调性的应用）

即直线 GH 与抛物线 C 相切.

设直线 HG 的方程为 $y=kx-1$，

2

由$\begin{cases} y=kx-1 \\ x^2=4y \end{cases}$得$x^2-4kx+4=0$，

所以$\Delta=16k^2-16=0$，解得$k=\pm1$，

此时$x^2-4kx+4=0$，即$x^2\pm4x+4=0$，

所以$x=\pm2$，故$H(\pm2,1)$，

所以$S_{\triangle GFH}=\frac{1}{2}|GF|\cdot|x_H|=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，故D正确.

12.【解析】原式变形为$me^m-m>n\ln n-\ln n$，构造函数$f(x)=xe^x-x$，$f'(x)=e^x(x+1)-1$，

$\because x>0$时，$e^x(x+1)>1,\therefore f'(x)>0,f(x)$单调递增，$\because x<0$时，$e^x(x+1)<1,\therefore f'(x)<0,f(x)$单调递减

对于A，取$m=n=1$满足原式，所以A错

对于B，当$\ln n\le0$，即$n\le1$时，$\because m>0,\therefore e^m>1\ge n$，当$\ln n>0$时，$\because f(x)$在$(0,+\infty)$时单调递增，原式$\Leftrightarrow f(m)>f(\ln n)$，$\therefore m>\ln n$，即$e^m>n$，所以B对。

对于C，当$\ln n\le0$时，显然会有$m+\ln n<0$；当$\ln n>0$时，根据单调性可设

$f(t)=f(m)>f(\ln n),t>0$且$\ln n<t$。当$x<0$时，令$h(x)=f(x)-f(-x)=x(e^x+e^{-x}-2)$，

由基本不等式知$e^x+e^{-x}>2$，所以$h(x)<0,\therefore h(m)<0$，即$f(t)=f(m)<f(-m)$，

又$\because x>0$时，$f(x)$单调递增，$\therefore t<-m,\therefore \ln n+m<t+m<0$，故C对

对于D，取$m=-2,n=\frac{1}{e}$，满足原式，但$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}<2$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13．答案：56

【解析】$T_{r+1}=C_8^rx^{8-r}\cdot x^{-r}=C_8^rx^{8-2r}$，令$8-2r=2$，$r=3$，$C_8^3=\frac{8!}{3!5!}=56$.故$(x+\frac{1}{x})^8$的展开式中$x^2$的系数为56.

14.答案：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$或$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$或$(x-\frac{3}{4})^2+(y-\frac{3}{4})^2=\frac{50}{16}$或$(x-1)^2+y^2=5$

【解析】过$(-1,1),(1,-1),(3,1)$三时，圆的方程是：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

过$(1,-1),(2,2),(3,1)$三时，圆的方程是：$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$

过$(-1,1),(1,-1),(2,2)$三时，圆的方程是：$(x-\frac{3}{4})^2+(y-\frac{3}{4})^2=\frac{50}{16}$

过 $(-1,1),(2,2),(3,1)$ 三时，圆的方程是：$(x-1)^2+y^2=5$

15．答案：$x=\dfrac{1}{2}$

【解析】由 $f(x)=e^{\cos(2\pi x)}+e^{2x}-2ex-\dfrac{1}{e}=0$ 得 $e^{\cos(2\pi x)}=2ex-e^{2x}+\dfrac{1}{e}$

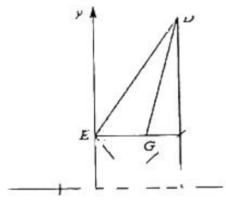
左边：$e^{\cos(2\pi x)}\geq\dfrac{1}{e}$，

右边：可证明$2ex\leq e^{2x}$，当且仅当$x=\dfrac{1}{2}$时取等，所以$2ex-e^{2x}+\dfrac{1}{e}\leq\dfrac{1}{e}$

要想两边相等，只能 $x=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 零点为 $x=\dfrac{1}{2}$

16．答案：$(1,\dfrac{5\sqrt{6}}{12}]$

16.【解析】因为 A 在 B 的上方，且这两点都在 C 上，



所以 $A(2m,\sqrt{3}n)$，$B(2m,-\sqrt{3}n)$，则 $|AB|=2\sqrt{3}n$．

因为 A 是线段 BD 的中点，又 $EA\perp y$ 轴，

所以 $EA\perp BD$，$|ED|=|EB|$，

所以 $\triangle BDE$ 的内心 G 在线段 EA 上.

因为 DG 平分 $\angle ADE$，在 $\triangle ADE$ 中，所以 $\dfrac{|DA|}{|DE|}=\dfrac{|GA|}{|GE|}$，

设 $EG=d$，所以 $\dfrac{2\sqrt{3}n}{\sqrt{(2m)^2+(2\sqrt{3}n)^2}}=\dfrac{2m-d}{d}=\dfrac{2m}{d}-1$，

因为 G 到 y 轴的距离不小于 $\dfrac{3}{2}m$，$\therefore\dfrac{3}{2}m\leq d<2m$

$$\therefore\frac{2\sqrt{3}n}{\sqrt{(2m)^2+(2\sqrt{3}n)^2}}\leq\frac{1}{3}$$

$\therefore\dfrac{n^2}{m^2}\leq\dfrac{1}{24}$，故 $1<e=\sqrt{1+\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}\leq\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．解：（1）当 n=1 时，$\because a_1^{\ 2}=2a_1,a_n>0\therefore a_1=2$，………1 分

当 $n\geq2$ 时，$a_n^{\ 2}+2a_n=4S_n$（1），

$a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}$（2），………2 分

（1）—（2）得：$a_n^2+2a_n-(a_{n-1}^2+2a_{n-1})=4(S_n-S_{n-1})$………3 分

即 $a_n^2-a_{n-1}^2=4a_n-2(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$………4 分

$\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$………5 分

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是 2 为首项，公差为 2 的等差数列，$\therefore a_n=2+2(n-1)=2n$………6 分

（2）由（1）得，$b_n=\dfrac{1}{2n\cdot(2n+2)}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$………7 分

$T_n=\dfrac{1}{4}\times(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{1}{n+1})$………8 分

$\because \dfrac{1}{n+1}>0,\therefore 1-\dfrac{1}{n+1}<1,\therefore T_n<\dfrac{1}{4}$………9 分

又$\because n\in N^*,\therefore \dfrac{1}{n+1}$随着 n 的增大而减少，从而 T_n 随着 n 的增大而增大

$\therefore T_n\geq T_1=\dfrac{1}{8}$

综上所述，$\dfrac{1}{8}\leq T_n<\dfrac{1}{4}$………10 分

18. 解：（1）在 ΔABC 中，

由 $a=b+2b\cos C$ 及正弦定理得：$\sin A=\sin B+2\sin B\cos C$，………1 分

又$\because A=\pi-(B+C)$，

$\therefore \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$………2 分

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B+2\sin B\cos C$，………3 分

$\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C=\sin B$，

$\sin(C-B)=\sin B$………4 分

$\because 0<\sin B=\sin(C-B),\therefore 0<C-B<C<\pi.$………5 分

$\because B+(C-B)=C<\pi,\therefore B=C-B,C=2B$………6 分

（2）方法一：

由（1）得：$C=2B$ 得 $B+C=3B\in(0,\pi)$，

$\therefore 0<B<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{1}{2}<\cos B<1$，………7 分

由题意 $a=b+2b\cos C$，$C=2B$ 及正弦定理得：

$\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+2b\cos C+c}{b}=\dfrac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin 2B}{\sin B}$………8 分

$=\dfrac{\sin B+2\sin B\cos C+2\sin B\cos B}{\sin B}=1+2\cos C+2\cos B=1+2\cos 2B+2\cos B$………9 分

$=1+2(2\cos^2 B-1)+2\cos B=4\cos^2 B+2\cos B-1$ ………10 分

$=4(\cos B+\frac{1}{4})^2-\frac{5}{4}$ ………11 分

$\because \frac{1}{2}<\cos B<1$，$\therefore 1<4(\cos B+\frac{1}{4})^2-\frac{5}{4}<5$，即 $1<\frac{a+c}{b}<5$，

故 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围为 $(1,5)$ ………12 分

方法二：由正弦定理得：$\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$，………6 分

$\because A+B+C=\pi, \therefore A=\pi-(B+C)$，

$\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{\sin[\pi-(B+C)]+\sin C}{\sin B}=\frac{\sin(B+C)+\sin C}{\sin B}$ ………7 分

由（1）得：$C=2B$，故 $\frac{a+c}{b}==\frac{\sin(B+2B)+\sin 2B}{\sin B}$

$=\frac{\sin B\cos 2B+\cos B\sin 2B+\sin 2B}{\sin B}$ ………8 分

$=\frac{\sin B\cos 2B+\cos B 2\sin B\cos B+2\sin B\cos B}{\sin B}$

$=\cos 2B+2\cos^2 B+2\cos B$

$=2\cos^2 B-1+2\cos^2 B+2\cos B=4\cos^2 B+2\cos B-1$ ………9 分

$=4(\cos B+\frac{1}{4})^2-\frac{5}{4}$ ………10 分

由（1）得：$C=2B$ 得 $B+C=3B\in(0,\pi)$，

$\therefore 0<B<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \frac{1}{2}<\cos B<1$，………11 分

$\therefore 1<4(\cos B+\frac{1}{4})^2-\frac{5}{4}<5$，即 $1<\frac{a+c}{b}<5$，

故 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围为 $(1,5)$ ………12 分

19．证明：（1）$\because OD//$平面PAB，平面$CAB\cap$平面$PAB=AB$，$OD\subset$平面CAB

$\therefore OD//AB$，又O为BC的中点………2 分

$\therefore D$为AC的中点　　又$\because E$为PC的中点

$\therefore DE//PA$，$PA\subset$平面PAB，$DE\not\subset$平面PAB

$\therefore DE//$平面PAB　　………4 分

（2）如图所示取 BD 的中点 F，连结 PF、AF，

$\because$ 底面 ΔABC 在半圆 O 上，BC 为圆 O 的直径，$\therefore AD \perp AB$ ……………5 分

$\because AB = AD = 4$

$\therefore BD = 4\sqrt{2}$,$\therefore FA = FB = FD = 2\sqrt{2}$

又 $\because PB = PD = 4$

$\therefore PB^2 + PD^2 = BD^2$ $\quad \therefore PB \perp PD$ ……………6 分

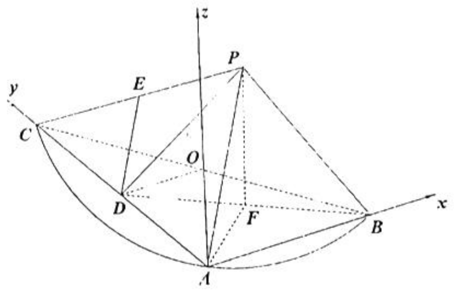
$\therefore FP = 2\sqrt{2}$

$\because FP^2 + FB^2 = PB^2, FP^2 + FA^2 = PA^2, FP^2 + FD^2 = PD^2$,

$\therefore FP \perp FB, FP \perp FA, FP \perp FD$,

又 $FA \cap FB = F$ ，FA、$FB \subset$ 平面 ABD

$\therefore PF \perp$ 平面 ABD ……………7 分



法一：建立如图所示的空间直角坐标系，

$A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(0,8,0)$, $P(2,2,2\sqrt{2})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (4,0,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4,8,0)$, $\overrightarrow{BP} = (-2,2,2\sqrt{2})$ ……………9 分

设平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$,则

$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 4x_1 = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{BP} = -2x_1 + 2y_1 + 2\sqrt{2}z_1 = 0 \end{cases}$ 令 $z_1 = 1$，则 $y_1 = -\sqrt{2}$，$x_1 = 0$

$\therefore \overrightarrow{n_1} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ……………10 分

设平面 CPB 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$,则

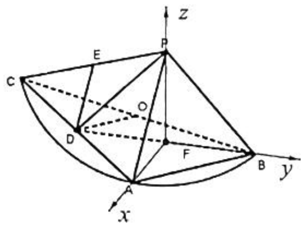
$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BC} = -4x_2 + 8y_2 = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BP} = -2x_2 + 2y_2 + 2\sqrt{2}z_2 = 0 \end{cases}$ 令 $y_2 = 1$，则 $x_2 = 2$，$z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{n_2}=\left(2,1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$……………11 分

设平面 PAB 与平面 PBC 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\left|-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{11}{2}}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$$ ……………12 分

法二：建立如图所示的空间直角坐标系，



$A(2\sqrt{2},0,0)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$C(-2\sqrt{2},-4\sqrt{2},0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},-6\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$……………9 分

设平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-2\sqrt{2}x_1+2\sqrt{2}y_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BP}=-2\sqrt{2}y_1+2\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$$ 令 $z_1=1$，则 $y_1=1$，$x_1=1$

$\therefore \overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$……………10 分

设平面 CPB 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\sqrt{2}x_2-6\sqrt{2}y_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BP}=-2\sqrt{2}y_2+2\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$$ 令 $z_2=1$，则 $x_2=-3$，$y_2=1$

$\therefore \overrightarrow{n_2}=(-3,1,1)$……………11 分

设平面 PAB 与平面 PBC 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|-3+1+1|}{\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$$ ……………12 分

20．解：(1)设 A_1="抽到第一袋"，A_2="抽到第二袋"，

B="随机抽取2张，恰好抽到一名男生和一名女生的报名表"……………1 分

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$……………2 分

$P(B|A_1)=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ ……………3 分

$P(B|A_2)=\frac{C_6^1C_5^1}{C_{11}^2}=\frac{6}{11}$ ……………4 分

由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}=\frac{109}{198}$ ……………5 分

(2)设在一轮比赛中得分为 X，则 X 的可能取值为 $-2,0,2$，则

$P(X=-2)=(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{5})=\frac{6}{25}$

$P(X=0)=\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{5})+(1-\frac{3}{5})\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$

$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

得分为 X 的分布列用表格表示

X	-2	0	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

……………7 分

设在二轮比赛中得分为 Y，则 Y 的可能取值为 $-4,-2,0,2,4$，则

$P(Y=-4)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{36}{625}$

$P(Y=-2)=\frac{6}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{156}{625}$

$P(Y=0)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{241}{625}$

$P(Y=2)=\frac{6}{25}\times\frac{13}{25}+\frac{13}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{156}{625}$

$P(Y=4)=\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}=\frac{36}{625}$ ……………10 分

得分为 Y 的分布列用表格表示为

Y	-4	-2	0	2	4
P	$\frac{36}{625}$	$\frac{156}{625}$	$\frac{241}{625}$	$\frac{156}{625}$	$\frac{36}{625}$

……………11 分

$E(Y)=(-4)\times\frac{36}{625}+(-2)\times\frac{156}{625}+0\times\frac{241}{625}+2\times\frac{156}{625}+4\times\frac{36}{625}=0$ ……………12 分

21.解：（1）由题得 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4} \\ c=\sqrt{7} \end{cases}$，………2 分

$\therefore a^2=16, b^2=9$ ………4 分

椭圆 E 的方程为: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ………5 分

（2）$N(t,6)$，t 为变量，设 $C(0,3), D(0,-3)$

当 $t=0$ 时，$P(0,-3), Q(0,3)$，直线 PQ 为 y 轴

$\therefore k_{CN}=\dfrac{3}{t}, k_{DN}=\dfrac{9}{t}$

则直线 CN 的方程为 $3x-ty+3t=0$，直线 DN 的方程为 $9x-ty-3t=0$ ………6 分

由 $\begin{cases} 3x-ty+3t=0 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ 得 $(t^2+16)y^2-6t^2y+9t^2-144=0$ ………7 分

设 $P(x_P, y_P)$ $\therefore y_C+y_P=\dfrac{6t^2}{t^2+16}$，又 $y_c=3, \therefore y_P=\dfrac{3t^2-48}{t^2+16}$

相应地，$x_c=0, x_P=\dfrac{-32t}{t^2+16}$，即 $P(\dfrac{-32t}{t^2+16}, \dfrac{3t^2-48}{t^2+16})$ ………8 分

同理，$Q(\dfrac{96t}{t^2+144}, \dfrac{-3t^2+432}{t^2+144})$ ………9 分

当 $t\neq 0$ 时，$k_{PQ}=\dfrac{-3t^2+144}{64t}$

直线 PQ 的方程为：$y-\dfrac{3t^2-48}{t^2+16}=\dfrac{-3t^2+144}{64t}\cdot(x+\dfrac{32t}{t^2+16})$，

即 $y=\dfrac{-3t^2+144}{64t}x+\dfrac{3}{2}$ $\therefore$ 过定点 $(0,\dfrac{3}{2})$ ………10 分

综上所述，直线 PQ 经过定点 M $(0,\dfrac{3}{2})$ ………11 分

(说明:也可以先令 t 为特殊值，算出定点，再证明)

$\therefore$ 当 $FM\perp PQ$ 时（M 为垂足），F 到直线 PQ 的距离取得最大值

10

$FM=\sqrt{(-\sqrt{7}-0)^2+(0-\frac{3}{2})^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$ ………12 分

22．解析：（1）$f'(x)=\frac{a}{x}-x=\frac{-x^2+a}{x}$

当$a\le 0, f'(x)<0, f(x)$在（$0,+\infty$）上单调递减，不可能两个零点；……………1 分

当$a>0$时，令$f'(x)=0$得$x=\sqrt{a}$

$x\in(0,\sqrt{a}), f'(x)>0, f(x)$单调递增，$x\in(\sqrt{a},+\infty), f'(x)<0, f(x)$单调递减，……………2 分

$\because x\to 0, f(x)\to -\infty; f(\sqrt{a})>f(1)=a>0; x\to +\infty, f(x)\to -\infty$ ……………3 分

$\therefore x\in(0,\sqrt{a})$有唯一零点且$x\in(\sqrt{a},+\infty)$有唯一零点，满足题意。

综上：$a\in(0,+\infty)$ ……………4 分

（2）先证右边：令$g(x)=\ln x-(x-1)$，则$g'(x)=\frac{1-x}{x}$。

$\therefore x\in(0,1), g'(x)>0, g(x)$单调递增，$x\in(1,+\infty), g'(x)<0, g(x)$单调递减

$\therefore g(x)$的最大值为$f(1)=0, \therefore g(x)\le 0$，即$\ln x\le x-1$ ……………5 分

$\therefore f(2a+1)=a\ln(2a+1)-\frac{1}{2}(2a+1)^2+a+\frac{1}{2}\le a\cdot 2a-\frac{1}{2}(2a+1)^2+a+\frac{1}{2}=-a<0$且$2a+1>\sqrt{a}$

$\therefore x_2<2a+1$ ……………6 分

又$\because f(1)>0 \therefore x_1<1$

$\therefore x_1+x_2<2a+1+1=2(a+1)$ ……………7 分

再证左边：曲线$y=f(x)$在$(x_1,0)$和$(x_2,0)$处的切线分别是

$l_1: y=\left(\frac{a}{x_1}-x_1\right)(x-x_1)$，　$l_2: y=\left(\frac{a}{x_2}-x_2\right)(x-x_2)$ ……………8 分

联立两条切线得$x_3=\frac{x_1+x_2}{\frac{a}{x_1x_2}+1}$，$\therefore \frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{a}{x_1x_2}+1$ ……………9 分

由题意得 $\begin{cases} a\ln x_1-\dfrac{1}{2}x_1^{\ 2}+a+\dfrac{1}{2}=0 \\ a\ln x_2-\dfrac{1}{2}x_2^{\ 2}+a+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}\right)}{\ln x_1-\ln x_2}$ ……………10 分

$\therefore$ 要证 $2x_3<x_1+x_2$，即证 $\dfrac{x_1+x_2}{\text{[illegible]}}>2$，即证 $\dfrac{a}{x_1x_2}>1$ 即证 $\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}>1$

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，即证 $\ln t<\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)(t>1)$

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ ……………11 分

$h'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$\therefore h(t)<h(1)=0$，$\therefore \ln t<\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)(t>1)$ 得证

综上：$2x_3<x_1+x_2<2(a+1)$ ……………12 分

12

关于我们