2021 年 9 月广西高三开学联考

理科数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题意的.

1. 已知集合 $A=\left\{y\mid y=\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos x，x\in R\right\}$，$B=\{x\mid(x^2+x-6)(x+5)>0\}$，$U=R$，则 $C_U(AUB)=(\quad)$

A. $\varnothing$　　B. $[-5,3]$　　C. $[-5,-3]$　　D. $[-3,5]$

2. 复数 $\frac{i}{i-1}$（i 为虚单位)的共轭复数为 $(\quad)$

A. $\frac{-1+i}{2}$　　B. $\frac{1+i}{2}$　　C. $\frac{-1-i}{2}$　　D. $-1-i$

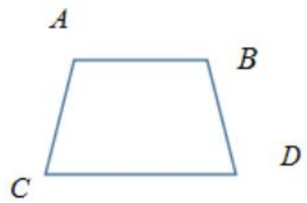
3. 观察一枚均匀的正方体骰子，任意选取其中两个面的点数，点数之和正好等于 5 的概率为 $(\quad)$

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{15}$　　C. $\frac{2}{15}$　　D. $\frac{4}{15}$

4. 已知 F_1,F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为双曲线上的一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|=|F_1F_2|$，则 C 的离心率为 $(\quad)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 如右图，已知梯形 $ABDC$，$AB=AC=BD=2$，$CD=4$，沿着对角线 AD 折叠使得点 B，点 C 的距离为 $2\sqrt{2}$，此时二面角 $B-AD-C$ 的平面角为 $(\quad)$



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

6. 已知数列$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots$，$n$，则该数列的第2021项为( )

$A.62$ $B.63$ $C.64$ $D.65$

7. 已知函数$f(x)=e^x\dfrac{\sin x}{x}$，则$f'(1)=$( )

$A.e\cos 1$ $B.e\sin 1$ $C.\dfrac{e}{2}$ $D.e$

8. 在ΔABC中，$\cos A=\dfrac{5}{9}$，则$\dfrac{\sqrt{1+c^4}}{ab}$的最小值为( )

$A.\dfrac{8}{9}$ $B.1$ $C.\dfrac{10}{9}$ $D.\dfrac{11}{9}$

9. 设$\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，则$\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)=$( )

$A.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $B.\dfrac{1}{2}$ $C.-\dfrac{1}{2}$ $D.-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知函数$y=(x+1)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$在$(-5,5)$内零点的个数为( )

$A.4$ $B.5$ $C.7$ $D.8$

11. 已知ΔABC的外心为O，$2AC=3BC=12$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=$( )

$A.11$ $B.10$ $C.9$ $D.12$

12. 已知F_1,F_2是椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$的两个焦点，$P$为椭圆上的一点，且$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=7:1:4\sqrt{3}$，则$\dfrac{a}{b}=$的( )

$A.1$ $B.2$ $C.4$ $D.\dfrac{1}{2}$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分，请把答案写在答题卡上相应的位置.

13. $\left(3x^3-\dfrac{2}{x}\right)^5(x+1)$展开式中常数项是__________.

14. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+\frac{a}{x}+1}$，$x\geq 1, a>0$ 的最小值为3，则 $a=$ ________ .

15. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为2，$PA=PB=PC=2$，PB，PC 中点分别为 D,E，则直线 AE、CD 的夹角为________ .

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\in[-1,1) \\ -|x^2-1|+2,\ x\in[1,3] \end{cases}$，函数 $g(x)=kx+2$，若 $f(x)=g(x)$，$x\in[-1,3]$ 恰有两个零点，则 k^2+2k 的取值范围是________ .

三、解答题（共70分，17题10分，18-22题每题12分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$sinA:sinB=6:5,\cos C=\frac{1}{5}$.

（1）求 cosA 的值；

（2）若点线段 AB 上的一点 D 满足 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0,$ 求 $\cos\angle DCB$ 的值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2, 2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}$，求 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i}<\frac{25}{9}$.

19. 前些年，为了响应绿色环保出行，提供方便市民的交通，某市大力推行“共享单车”，根据统计，近6年这个城市“共享单车”盈利数据如表：

年份代号 x	1	2	3	4	5	6
盈利 y（万元）	6	9	10	9.8	12	10

（1）从这6年中，记单车盈利超过9.5（万元）的年份数量为 X，求 X 的分布列及期望；

（2）从1-6这6个年份中任取两年，盈利总额小于19（万元）的概率

20. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle ABC=90^\circ$，$\Delta ASC\cong\Delta CBA$，$AB=SC=\sqrt{7}$，$SB=\sqrt{3}$，$AC=3$.

（1）求证：平面 $ASC\perp$ 平面 ABC；

（2）已知 M 是线段 AC 上一点，$AM=\dfrac{3}{2}$，且二面角 A - SM - B 的余弦值大小.

21. 函数 $f(x)=x^3+2x^2+ax$，

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 a>0 时，设 $f'(x)=0$ 的零点个数为 2，且零点 x_1，x_2 满足：$x_1^3+x_2^3=2$，

求函数 $g(x)=ax^2-\ln x+1, -1\le x\le 2$ 的最大值.

22. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$, 其右焦点为 F，过 F 的直线与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，

（1）求直线的斜率；

（2）求 AB 中点的轨迹坐标方程.

2021 年 9 月广西高三开学联考

理科数学试卷

参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题意的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	C	B	D	C	A	A	C	A	B	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分，请把答案写在答题卡上相应的位置.

13. $\left(3x^3-\frac{2}{x}\right)^5(x+1)$展开式中常数项是__240__.

14. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+\frac{a}{x}+1}$，$x\geq 1,a>0$ 的最小值为 3，则 $a=$ __16__.

17. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 2，$PA=PB=PC=2$，PB，PC 中点分别为 D,E，则直线 AE、CD 的夹角为__$\arccos\frac{1}{6}$__.

18. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x,x\in[-1,1) \\ -\left|x^2-1\right|+2,\ x\in[1,3] \end{cases}$，函数 $g(x)=kx+2$，若 $f(x)=g(x)$，$x\in[-1,3]$恰有两个零点，则 k^2+2k 的取值范围是____. $\left[-1,\frac{16}{9}\right]$

三、解答题（共 70 分，17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．已知在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$sinA:sinB=6:5$，$\cos C=\frac{1}{5}$.

（1）求 cosA 的值；

（2）若点线段 AB 上的一点 D 满足 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，求 $\cos\angle DCB$ 的值.

解：（1）因为

$$\cos C=\frac{1}{5},$$

所以

$$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故设$a=6m,b=5m,a:b=\sin A:\sin B=6:5$，

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{(6m)^2+(5m)^2-c^2}{2\times 6m\times 5m}=\frac{1}{5},$$

所以

$$c=7m,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{19}{35}$$

$$\cos\angle DCB=\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

18. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2,2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n=\dfrac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}$，求$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{b_i}{i}<\dfrac{25}{9}$.

解：（1）因为$a_1=1$，$a_2=2,2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

所以$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，$a_2-a_1=1,$

所以$a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$n\geq 2$，

所以$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^{n-1}},n\geq 2,\\ 1,n=1\end{cases}$

（2）$b_n=\dfrac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}=\dfrac{1}{n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}\right)}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i-1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^i}\right)}$$

$$\le\frac{4}{9}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$<\frac{4}{9}+4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{25}{9}.$$

19. 前些年，为了响应绿色环保出行，提供方便市民的交通，某市大力推行“共享单车”，根据统计，近 6 年这个城市“共享单车”盈利数据如表：

年份代号 x	1	2	3	4	5	6
盈利 y（万元）	6	9	10	9.8	12	10

（2）从这 6 年中，记单车盈利超过 9.5（万元）的年份数量为 X，求 X 的分布列及期望；

（2）从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 19（万元）的概率

解：（1）

观察表格知这 6 年中，单车盈利超过 9.5（万元）的年份数量为 X，X 的分布列如下：

年份代号 X	10	12
盈利 y（万元）	1/3	1/3

X 的期望

$$EX=10\times\frac{1}{3}+12\times\frac{1}{3}=\frac{22}{3}.$$

（3）从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 18（万元）的年份代号是

1,2；1,3；1,4；1,6；

所以从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 18（万元）的概率是

$$P=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15}.$$

20. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle ABC=90°$，$\Delta ASC\cong\Delta CBA$，$AB=SC=\sqrt{7}$，$SB=\sqrt{3}$，$AC=3$.

（1）求证：平面 $ASC\perp$ 平面 ABC；

（2）已知 M 是线段 AC 上一点，$AM=\frac{3}{2}$，且二面角 A - SM - B 的余弦值大小.

解：

（1）在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle ABC=90°$，

所以 $AS\perp SC, AB\perp BC$，

$\Delta ASC\cong\Delta CBA$，$AB=SC=\sqrt{7}$，$SB=\sqrt{3}$，$AC=3$.

所以 $AS=BC=\sqrt{2}$, 作 $SH\perp AC$，$BH\perp AC$, 得

$SB^2=SH^2+HM^2+MB^2=3$，

所以平面 ASC⊥平面 ABC；

(2) $SK\perp AM$，$KL\perp BM$，

则 $\angle SLK$ 为二面角 A-SM-B 的平面角，

$$\tan\angle \mathrm{SLK}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{6}=3\sqrt{2}.$$

$$\cos\angle SLK=\frac{\sqrt{19}}{19}.$$

21．函数 $f(x)=x^3+2x^2+ax$，

（1）讨论 f（x）的单调性；

（2）当 a＞0 时，设 $f'(x)=0$ 的零点个数为 2，且零点 x_1，x_2 满足：$x_1^3+x_2^3=2$，

求函数 $g(x)=ax^2-\ln x+1, -1\le x\le 2$ 的最大值.

解：（1）$f'(x)=3x^2+4x+a$，

$\Delta=16-12a$

若 $a>\frac{4}{3}$, 则 $\Delta<0$, $f'(x)<0$; $f(x)$单调递减；

若 $a=\frac{4}{3}$, 则 $\Delta=0$, $f'(x)\ge 0$; $f(x)$单调递增；

若 $a<\frac{4}{3}$, 则 $\Delta>0$, 当$x\le\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}$, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增；

当$\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}\le x\le\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$, $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\ge\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$, $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

(2) 当 a>0 时，

设 $f'(x)=0$ 的零点个数为 2，且零点 x_1，x_2 满足：$x_1^3+x_2^3=2$，

所以 $a=\frac{40}{9}$.

$g'(x)=2ax-\frac{1}{x}+1>0, -1\le x\le 2$；

$g(x)$ 单调递增；

$g(x)\le g(2)=4a-\ln 2+1=\frac{169}{9}-\ln 2.$

函数 $g(x)=ax^2-\ln x+1, -1\le x\le 2$ 的最大值为

$\frac{169}{9}-\ln 2.$

22. 设双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$, 其右焦点为 F，过 F 的直线与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点，

（1）求直线的斜率；
（2）求 AB 中点的轨迹坐标方程.

解：（1）设直线方程为 $y=kx-2k$，代入方程$\frac{x^2}{3}-y^2=1$, 得

$(3k^2-1)x^2-12k^2x+12k^2+3=0$,

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}>0, x_1x_2=\frac{3}{3k^2-1}>0$，

$\Delta=144k^4-4(3k^2-1)(12k^2+3)=3k^2+3>0$，

所以 $k\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

（2）设 AB 中点为(x_0, y_0)，

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{6k^2}{3k^2-1}$， $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=kx_0-2k=\frac{2k}{3k^2-1}$，

$(x_0-1)^2+3y_0^2=1$.

所以 AB 中点的轨迹坐标方程为

$(x-1)^2+3y^2=1$.