湛江第一中学 2024 届高三级开学考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B　由 $e^{x-1}>1$ 得 $e^{x-1}>e^0$，函数 $y=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $x-1>0$，即 $M=\{x\mid x>1\}$，又由 $x^2-2x<0$ 得 $0<x<2$，即 $N=\{x\mid 0<x<2\}$，所以 $M\cup N=\{x\mid x>0\}$. 故选 B.

2. A　$z=\dfrac{-2+i}{1+2i}+1=\dfrac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+1=\dfrac{5i}{5}+1=1+i$，则 $|z|=\sqrt{2}$. 故选 A.

3. C　$\because \overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$\therefore m=-\dfrac{3}{4}$，$n=\dfrac{1}{4}$，$\therefore m+n=-\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

4. A　令 $u=x^2-3x+1$，$y=3^u$，又 $y=3^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$u=x^2-3x+1$ 的增区间为 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，所以 $f(x)$ 的增区间为 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. 故选 A.

5. D　$\because a_4=\dfrac{1}{2}a_5$，$\therefore a_4=\dfrac{1}{2}(a_4+d)$，$a_4=d$，$a_5=2d$. $\therefore a_1=a_4-3d=-2d$，$a_1+a_4=-d$.
$\therefore \dfrac{S_9}{S_4}=\dfrac{(a_1+a_9)\times 9}{(a_1+a_4)\times 4}=\dfrac{2a_5\times 9}{(a_1+a_4)\times 4}=\dfrac{4d\times 9}{-d\times 4}=-9$. 故选 D.

6. A　因为 $|PO|=|PQ|=|PF|$，所以 $\dfrac{p}{2}=1\times 2$，即 $p=4$，$x^2=8y$，$x_0^2=8\times 1$，又 $\because x_0>0$，$\therefore x_0=2\sqrt{2}$.

7. D　由 $\cos 2\theta-\sin 2\theta=\cos^2\theta$ 得 $-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta$，化简得 $-2\cos\theta=\sin\theta$，$\tan\theta=-2$，
则 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{4}{3}$，$\tan 3\theta=\dfrac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta}=-\dfrac{2}{11}$. 故选 D.

8. B　由 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 可知：$f(x)$ 关于 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称，故 $\omega\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\omega=4k+\dfrac{2}{3}$，$k=0$ 时，ω 取最小值为 $\dfrac{2}{3}$. 故选 B.

9. AD　A：$\dfrac{1}{7}\times(0+1+5+6+7+11+12)=6$，故 A 正确；
B：$\dfrac{1}{7}\times(6^2+5^2+1^2+0^2+1^2+5^2+6^2)=\dfrac{124}{7}$，故 B 错误；
C：$12-0=12$，故 C 错误；
D：$7\times 70\%=4.9$，故 70 百分位数是第 5 个数 7. 故 D 正确. 故选 AD.

10. BC　A：$f(x)=0\Leftrightarrow x-1-\ln x=0$，$x-1\geqslant \ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 A 错误，C 正确；B：$f'(x)=2x-2-\ln x$，$f''(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 为减函数，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 为增函数，又 $f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)>0$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$f'(1)=0$，有 2 个零点，B 正确，D 错误. 故选 BC.

11. ABD　由圆 C 的方程可知圆 C 的圆心坐标为 $(3,1)$，即 A 正确；
当 $r=2$ 时，圆 M：$(x-m)^2+(y-2m)^2=4$，此时易知 $|MC|\geqslant\sqrt{5}>2-1$，所以有 $MC=\sqrt{(m-3)^2+(2m-1)^2}<3$，解得 $1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<m<1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 B 正确；
因为 $MA\perp CA$，且 $r=3$，所以 $|CM|^2=3^2+1^2=10$，即 $(m-3)^2+(2m-1)^2=10$，解得 $m=0$ 或 $m=2$，即 C 错误；
因为圆 C 的直径为 2，所以当 $|AB|=2$ 时，AB 为圆 C 的直径，所以 $r^2=|MC|^2+1=(m-3)^2+(2m-1)^2+1=5m^2-10m+11=5(m-1)^2+6$，当且仅当 $m=1$ 时，$r_{\min}=\sqrt{6}$，即 D 正确. 故选 ABD.

12. BC　由题可知，PC 的中点即为 $P-ABC$ 的外接球的球心，设外接球的半径为 R，则 $4\pi R^2=16\pi$，得 $R=2$，因为 $PA^2+AB^2+BC^2=PC^2=4R^2$，所以 $PA^2+BC^2=14$，鳖臑 $P-ABC$ 的体积 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot PA=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\cdot(2BC\cdot PA)\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{12}\cdot(BC^2+PA^2)=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$，当且仅当 $BC=PA=\sqrt{7}$ 时，$(V_{P-ABC})_{\max}=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$，故 A 项

错误，B 项正确；

因为三棱柱为直三棱柱，故 $BC\perp$ 平面 PAB，所以直线 PC 与平面 PAB 所成的角即为 $\angle BPC$，$\sin\angle BPC=\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{4}$；故 C 项正确；

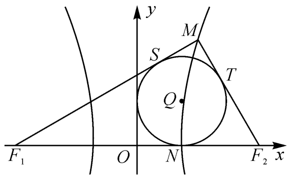
设鳖臑 $P-ABC$ 的内切球半径为 r，由等体积法 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}AB\cdot BC+\dfrac{1}{2}AB\cdot PA+\dfrac{1}{2}AC\cdot PA+\dfrac{1}{2}PB\cdot BC\right)\cdot r=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}$，得 $\dfrac{7\sqrt{2}}{6}=\dfrac{1}{3}(3\sqrt{7}+\sqrt{14})r$，所以 $r=\dfrac{3\sqrt{14}-2\sqrt{7}}{14}$，故 D 项错误. 故选 BC.

13. 10　展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^r\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{5-r}=C_5^r\cdot(-1)^{5-r}\cdot x^{\frac{5}{2}(r-1)}$，令 $\dfrac{5}{2}(r-1)=5$，得 $r=3$，

∴展开式中含 x^5 的系数为 $C_5^3\cdot(-1)^2=10$.

14. $\dfrac{89}{90}$　记“这道题被做出来”为事件 A，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{89}{90}$.

15. $[2,+\infty)$　$f'(x)=\left[a-\dfrac{2}{x}+a(x-1)-2\ln x\right]e^x=\left[ax-\dfrac{2}{x}-2\ln x\right]e^x\geqslant 0$，即 $ax-\dfrac{2}{x}-2\ln x\geqslant 0$，对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，当 $a\geqslant 2$ 时，$ax-\dfrac{2}{x}-2\ln x\geqslant 2x-\dfrac{2}{x}-2\ln x=g(x)$，$g'(x)=2+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2}>0$，故 $g(x)>g(1)=0$ 符合题意，当 $a<2$ 时，$g(1)=a-2<0$，$\exists m\in(1,+\infty)$，在 $(1,m)$ 上，$g(x)<0$ 不合题意，故 $a\geqslant 2$.



16. $\sqrt{3}+1$　内切圆 Q 分别与 F_1M,F_2M,F_1F_2 切于点 S,T,N，则四边形 $QSMT$ 为正方形，故 $|F_1M|+|F_2M|-|F_1F_2|=2a$，$|F_1M|-|F_2M|=2a$，$|F_1M|=c+2a$，$\therefore(c+2a)^2+c^2=(2c)^2\Rightarrow c^2=2a^2+2ac$，$e=\sqrt{3}+1$.

17. 解：(1)根据余弦定理，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，

解得 $a=1$；…………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{a^2}{bc}=2-\sqrt{3}$，

因此得到 $\dfrac{b^2+c^2-(2-\sqrt{3})bc}{2bc}=\dfrac{(b-c)^2+\sqrt{3}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{(b-c)^2}{2bc}=0$，

即 $(b-c)^2=0$，所以 $b=c$，因此三角形为等腰三角形，………………………… 8 分

又知道 $A=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $B=C=\dfrac{5\pi}{12}$. ………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由 $\dfrac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\dfrac{1}{n}$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=3\times\dfrac{a_n}{n}$，………………………………… 3 分

又 $\dfrac{a_1}{1}=1$，$\therefore\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，………………………… 4 分

$\therefore\dfrac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times 3^{n-1}$；…………………………………………………… 6 分

(2)$S_n=1\times 3^0+2\times 3^1+\cdots+n\times 3^{n-1}$，①

①×3 得 $3S_n=1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n$，② ……………………………………… 9 分

①－②得 $-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times 3^n=\dfrac{1-3^n}{1-3}-n\times 3^n=\dfrac{3^n-1}{2}-n\times 3^n$，

$\therefore S_n=\dfrac{(2n-1)\times 3^n+1}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 证明：(1)过 A 作 $AD\perp A_1B$ 于 D，

∵平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，且平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，

$\therefore AD\perp$ 平面 A_1BC，故 $AD\perp BC$，……………………………………… 3 分

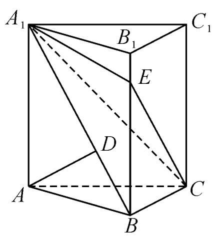
在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，故 $BC\perp AA_1$，

由 $AD\cap AA_1=A$ 可知，$BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，故 $BC\perp AB$；………………… 6 分

(2)以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

不妨设 $|\overrightarrow{BC}|=2$，

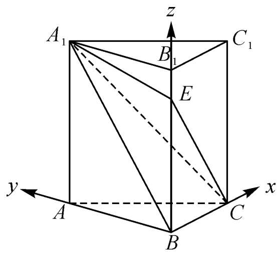
则 $C(2,0,0)$，$A(0,2\sqrt{3},0)$，$B_1(0,0,4)$，$A_1(0,2\sqrt{3},4)$，$E(0,0,3)$，…………… 7 分



则 $\overrightarrow{CA_1}=(-2,2\sqrt{3},4)$，$\overrightarrow{BA_1}=(0,2\sqrt{3},4)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,0,3)$，

设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_1+2\sqrt{3}y_1+4z_1=0,\\ -2x_1+3z_1=0,\end{cases}$



令 $z_1=2\sqrt{3}$，则 $x_1=3\sqrt{3}$，$y_1=-1$，即 $\boldsymbol{m}=(3\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})$，……………… 9 分

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}y_2+2z_2=0,\\ \sqrt{3}y_2+2z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=\sqrt{3}$，则 $x_2=0$，$y_2=-2$，即 $\boldsymbol{n}=(0,-2,\sqrt{3})$，……………………… 11 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{8}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{40}}=\dfrac{4}{\sqrt{70}}=\dfrac{2\sqrt{70}}{35}$，

二面角 $E-A_1C-B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{70}}{35}$. ……………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意可得高三 12 个班级共抽取 120 名，

所以 $40+x+10+3x-10+40=120$，解得 $x=10$；…………………………………………………… 3 分

(2)利用列联表可得 $\chi^2=\dfrac{120\times(40\times40-20\times20)^2}{60\times60\times60\times60}=\dfrac{40}{3}\approx13.333>10.828$，

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们认为学生课余学习时间超过两小时跟学生成绩有关，此推断犯错误概率不大于 0.001；…………………………………………………………………………………… 6 分

(3)这 6 人中课余学习时间超过两小时的人数为 $6\times\dfrac{40}{40+20}=4$，课余学习时间不超过两小时的人数为 2，

……………………………………………………………………………………………………… 7 分

X 的取值为 1,2,3，………………………………………………………………………………… 8 分

有 $P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$；…………………………………………………………………… 9 分

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$；…………………………………………………………………… 10 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………………………………………………… 11 分

故 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$. …………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意可知 $|BF|=a=2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；……

……………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)由直线 l 的方程为 $y=x-2m$，则点 $N(0,m)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}|m|$，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=x-2m,\end{cases}$ 整理可得 $7x^2-16mx+16m^2-12=0$，……………………… 6 分

由判别式 $\Delta=256m^2-4\times7(16m^2-12)>0$，解得 $m\in\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16m}{7}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{16m^2-12}{7}$，

可得 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-2m-x_2+2m)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{256m^2}{49}-\dfrac{4(16m^2-12)}{7}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-12m^2}$，

所以 $S_{\triangle ACN}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-12m^2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}|m|$ …………………………… 10 分

$=\frac{3\sqrt{3}}{7}\sqrt{(7-4m^2)\cdot 4m^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{7}\times\frac{7-4m^2+4m^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$（当且仅当 $m=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}\in\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 时，等号成立），

所以所求直线的方程为 $y=x+\frac{\sqrt{14}}{2}$ 或 $y=x-\frac{\sqrt{14}}{2}$. ………………………………………………… 12 分

22.(1)解：$\because f(x)=e^{x-1}-\ln x$,

$\therefore f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$, ………………………………………………………………………… 2 分

设 $\mu(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$, $\mu'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$,

$\therefore \mu(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增函数， ………………………………………………………… 3 分

$\mu(1)=0$, $\therefore f'(1)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$, ……………………………………………… 4 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$, $\therefore x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f(x)_{\min}=f(1)=1$; ……………… 5 分

(2)证明：$exf(x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$, 只需证 $ex(e^{x-1}-\ln x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$,

即 $(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$, 令 $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}$, 则 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}(x>0)$, ………… 6 分

当 $x>0$ 时，令 $h(x)=g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}$, 则 $h'(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{x^2}>0$, $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

即 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数， ………………………………………………………… 7 分

又因为 $g'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left[e^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]<0$, $g'(1)=e-1>0$,

所以存在 $x_0\in\left(\frac{2}{3},1\right)$, 使得 $g'(x_0)=0$, ……………………………………………………… 8 分

由 $g'(x_0)=x_0e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2e^{x_0}-1}{x_0}=0$,

得 $x_0^2e^{x_0}=1$, 即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$, 即 $-2\ln x_0=x_0$, …………………………………………………… 9 分

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}<0$, $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}>0$, $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln x_0+\frac{1}{2}=\frac{x_0-1}{x_0^2}+\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x_0^3+x_0^2+2x_0-2}{2x_0^2}$, ……………… 10 分

令 $\varphi(x)=x^3+x^2+2x-2\left(\frac{2}{3}<x<1\right)$,

则 $\varphi'(x)=3x^2+2x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递增，所以 $\varphi(x_0)>\varphi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}>0$, ……………………………… 11 分

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=\frac{\varphi(x_0)}{2x_0^2}>0$, 所以 $(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$,

即 $exf(x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$.. ……………………………………………………………… 12 分