南充市高2023届“三诊”理科数学参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	D	C	B	B	A	C	A	D	C	C	B	D

二．填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡上．

13．60　　14．1400　　15．$\frac{13}{4}$　　16．①③④

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17—21题必考题，每个试题考生必须作答.第22、23题为选考题，考试根据要求作答.

(一)必考题

17．解：(1)$\because 2S_n=3a_n-3$………①

$\therefore$ 当$n\geq 2$时，$2S_{n-1}=3a_{n-1}-3$………② ……………………（2分）

①－②得：$2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，即 $a_n=3a_{n-1}(n\geq 2)$

$\because a_1=3$ ……………………（3分）

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$以3为首项，3为公比的等比数列．

$\therefore a_n=3^n(n\in N^*)$ ……………………（6分）

(2)$\because b_n=a_n+\log_3 a_n=3^n+n.$ ……………………（7分）

$$\begin{aligned}\therefore T_n&=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=(3^1+1)+(3^2+2)+\cdots+(3^{n-1}+n-1)+(3^n+n)\\&=(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}+3^n)+(1+2+\cdots+n-1+n)\\&=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{3^{n+1}+n^2+n-3}{2}.\end{aligned}$$

所以$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n=\frac{3^{n+1}+n^2+n-3}{2}$． ……………………（12分）

18．解：(1)由$\bar{x}=\frac{2+3+4+5+6+8+9+11}{8}=6$，$\bar{y}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i=\frac{48.6}{8}=6.075$得： ……………………（2分）

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{334.1-8\times6\times6.075}{356-8\times36}=0.625$$

由$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$得$\hat{a}=6.075-0.625\times6=2.325$

所以年收入的附加额y与投资额x的线性回归方程为$\hat{y}=0.625x+2.325$. ……………………（6分）

(2)8个投资额中，收入附加额大于投资额的企业个数为5，

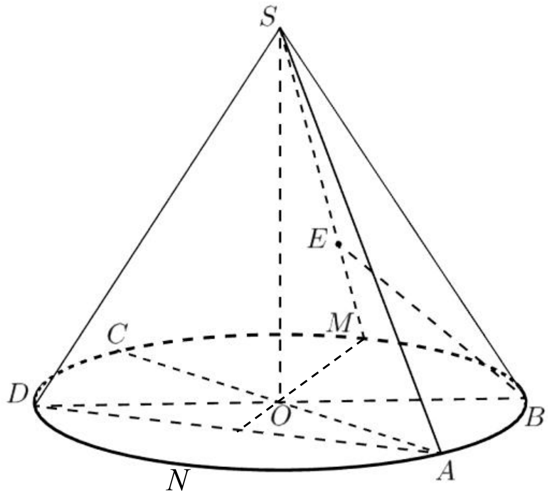
故X的所有可能取值为0，1，2，3.……………………（7分）

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，$P(X=1)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

故$E(X)=1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}=\frac{15}{8}$......................（12 分）



19．证明：(1)连接 MO 并延长交 AD 于 N....................（2 分）

$\because M$ 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点

$\therefore MO$ 是 $\angle BOC$ 的角平分线，

$\therefore MN$平分$\angle AOD$

$\because OA=OD$

$\therefore MO\perp AD$ ....（4 分）

又$\because$ 在圆锥 SO 中，$SO\perp$ 平面$ABCD$

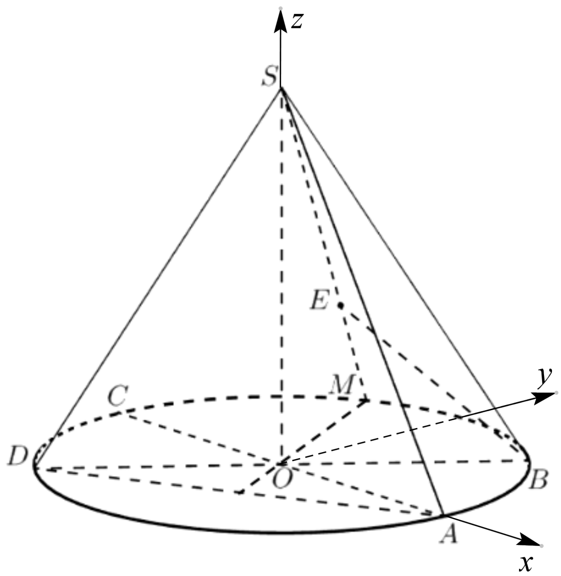
$\therefore SO\perp AD$

$\because MO$、$SO\subset$ 平面SMN，且$MO\cap SO=O$

$\therefore AD\perp$ 平面SMO

又$\because$ $SM\subset$ 平面SMO

故 $AD\perp SM$ ....（6 分）



(2)以 O 为坐标原点，OA，OS 所在的直线分别为 x 轴，z 轴，以过 O 点且垂直 OA 的直线为 y 轴，建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$.

故 $A(6,0,0)$，$B(3,3\sqrt{3},0)$，$M(-3,3\sqrt{3},0)$，$D(-3,-3\sqrt{3},0)$ $S(0,0,6)$

$\overrightarrow{DA}=(9,3\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{SA}=(6,0,-6)$，$\overrightarrow{MS}=(3,-3\sqrt{3},6)$

$\overrightarrow{BM}=(-6,0,0)$

设$\overrightarrow{ME}=\lambda\overrightarrow{MS}$，故$\overrightarrow{ME}=(3\lambda,-3\sqrt{3}\lambda,6\lambda)$

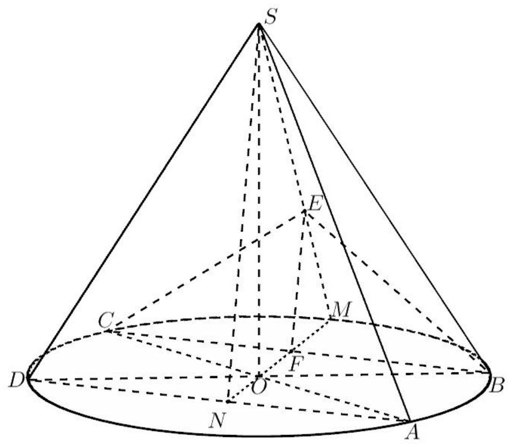
$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}=(-6+3\lambda,-3\sqrt{3}\lambda,6\lambda)$

设平面 SAD的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{SA}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$得$\begin{cases}9x+3\sqrt{3}y=0\\ 6x-6z=0\end{cases}$

令 $z=1$得：法向量$\vec{n}=(1,-\sqrt{3},1)$ ....（8 分）

$\because BE$ // 平面SAD

$\therefore \overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=0$，即 $-6+3\lambda+9\lambda+6\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$



$\therefore \overrightarrow{ME}=(1,-\sqrt{3},2)$

又 $\because \overrightarrow{AM}=(-9,3\sqrt{3},0)$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}=(-8,2\sqrt{3},2)$ ....（10 分）

设 AE 与平面 SAD 所成角为 θ

$\therefore \sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|-8-6+2|}{\sqrt{5}\sqrt{64+12+4}}=\dfrac{3}{5}$

即 AE 与平面 SAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$. ....（12 分）

注：这里也可以先证明平面 BCE // 平面 SAD .得 EF // SN，进而得 E 为 SM 的三等分点，再建系证明即可.

20．解析：(1)由题意易知，动点 P 的轨迹是以 $M(-\sqrt{3},0),N(\sqrt{3},0)$ 为焦点的椭圆，且 $2a=4$

$\therefore$ 动点 P 的轨迹 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ....（4 分）

(2) 显然直线 AD 的斜率存在，设 AD 的方程为：$y=k(x+2)$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$ 得：$(4k^2+1)x^2+16kx+4(4k^2-1)=0$

由 $-2x_1=\dfrac{4(4k^2-1)}{4k^2+1}$ 得：$x_1=\dfrac{2(1-4k^2)}{4k^2+1}$　　$\therefore y_1=k(x_1+2)=\dfrac{4k}{4k^2+1}$

$\therefore D\left(\dfrac{2(1-4k^2)}{4k^2+1},\dfrac{4k}{4k^2+1}\right)$ ....（6 分）

由 AD // BE 可设 BE 的方程为 $y=kx-1$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx-1\end{cases}$ 得：$(4k^2+1)x^2-8kx=0$

$\therefore x_2=\dfrac{8k}{4k^2+1}$

$\therefore y_2=k\dfrac{8k}{4k^2+1}-1=\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}$

$\therefore E\left(\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{4k^2-1}{4k^2+1}\right)$....................（9 分）

法 1：

$$S=\frac{1}{2}|OD|\cdot|OE|\cdot\sin\angle DOE=\frac{1}{2}|OD|\cdot|OE|\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OD}|\cdot|\overrightarrow{OE}|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OD}|^2\cdot|\overrightarrow{OE}|^2-\left(\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1{}^2+y_1{}^2)(x_2{}^2+y_2{}^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x_1{}^2y_2{}^2+x_2{}^2y_1{}^2-2x_1x_2y_1y_2}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2(1-4k^2)}{4k^2+1}\cdot\frac{4k^2-1}{4k^2+1}-\frac{8k}{4k^2+1}\cdot\frac{4k}{4k^2+1}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{2(4k^2-1)^2+32k^2}{(4k^2+1)^2}\right|=\frac{(4k^2-1)^2+16k^2}{(4k^2+1)^2}$$

$$=\frac{(4k^2+1)^2}{(4k^2+1)^2}$$

$$=1$$

$\therefore S$为定值1....................（12 分）

法2：DE的方程为：$y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，即$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$

$\therefore O$到DE的距离为

$$d=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{|DE|}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|DE|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

后同

21．解：(1).当 $a=0$ 时，$f(x)=x\sin x+\cos x$，$f'(x)=x\cos x$

由 $f'(x)=0$得：$x=-\dfrac{\pi}{2}$或$\dfrac{\pi}{2}$.....................（2 分）

列表：

x	$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗	极大	↘

$\therefore f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有2个极大值：$f(-\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$....................（5 分）

$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有1个极小值：$f(0)=1$

(2).由$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$知：$h(x)\ge g(x)$

(i) 当$x\in(\pi,+\infty)$时, $g(x)>0$

$\therefore h(x)>0$，故$h(x)$在$(\pi,+\infty)$上无零点. ....（6 分）

(ii) 当$x=\pi$时, $g(\pi)=0, f(\pi)=-1+\dfrac{\pi^2}{2}a$.

故当$f(\pi)\le 0$时，即$a\le\dfrac{2}{\pi^2}$时，$h(\pi)=0$, $x=\pi$是$h(x)$的零点.

当$f(\pi)>0$时，即$a>\dfrac{2}{\pi^2}$时，$h(\pi)=f(\pi)>0, x=\pi$不是$h(x)$的零点. ....（7 分）

(iii) 当$x\in(0,\pi)$时, $g(x)<0$.

故$h(x)$在$(0,\pi)$的零点就是$f(x)$在$(0,\pi)$的零点.

$f'(x)=x(a+\cos x), f(0)=1$

①当$a\le -1$时，$a+\cos x\le 0$, 故$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)\le 0, f(x)$在$(0,\pi)$是减函数

结合$f(0)=1, f(\pi)=-1+\dfrac{\pi^2}{2}a<0$可知，$f(x)$在$(0,\pi)$有一个零点

故$h(x)$在$(0,\pi)$上有1个零点. ....（9 分）

②当$a\ge 1$时，$a+\cos x\ge 0$, 故$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)\ge 0, f(x)$在$(0,\pi)$是增函数

结合$f(0)=1$可知，$f(x)$在$(0,\pi)$无零点

故$h(x)$在$(0,\pi)$上无零点.

③当$a\in(-1,1)$时, $\exists x_0\in(0,\pi)$, 使得$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0, f(x)$在$(0,x_0)$是增函数;

$x\in(x_0,\pi)$时，$f'(x)<0, f(x)$在(x_0,π)是减函数;

由$f(0)=1$知：$f(x_0)>0$.

当$f(\pi)=-1+\dfrac{\pi^2}{2}a\ge 0$, 即$\dfrac{2}{\pi^2}\le a<1$时，$f(x)$在$(0,\pi)$上无零点

故$h(x)$在$(0,\pi)$上无零点.

当$f(\pi)=-1+\dfrac{\pi^2}{2}a<0$, 即$-1<a<-\dfrac{2}{\pi^2}$时，$f(x)$在$(0,\pi)$上有1个零点

故$h(x)$在$(0,\pi)$上有1个零点.

................（11 分）

综上所述：$a<\dfrac{2}{\pi^2}$时，$h(x)$有2个零点；

$a=\dfrac{2}{\pi^2}$时，$h(x)$有1个零点；

....................（12 分）

$a>\dfrac{2}{\pi^2}$时，$h(x)$无零点；

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22.解：(1) C_1 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$ ……………………………(2分）

C_2 的极坐标方程 $\rho^2-4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-4=0$ ……………………………(5分）

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t为参数)

将 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t为参数) 代入 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 得：$t^2+\sqrt{2}t-8=0$ ………(7分）

显然 $\Delta>0$，设点 A,B 在直线 l 上对应的参数分别为 t_1,t_2，则

$t_1+t_2=-\sqrt{2}$，$t_1\cdot t_2=-8<0$

$\therefore \overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{MB}$的夹角为$\pi$

$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|t_1|\cdot|t_2|\cos\pi=-8$ …………………………………(10分）

23.解:(1)由 $f(x)=|x-1|+|x-3|=\begin{cases} -2x+4, & x<1 \\ 2, & 1\le x\le 3 \\ 2x-4, & x>3 \end{cases}$

得函数 $f(x)$ 图像如右图所示，

$\because f(0)=f(4)=4$

所以$2<m<4$ ....（5 分）

(2)由 $f(x)$ 图像可知：其图像关于 $x=2$ 对称，

故 $a+b=4$

$\therefore \left(\sqrt{a}+\sqrt{5b}\right)^2=\left(1\cdot\sqrt{a}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{b}\right)^2\le\left[1^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]=6(a+b)=24$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{5b}\le 2\sqrt{6}$,当且仅当$\dfrac{\sqrt{a}}{1}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{5}}$，即$a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{10}{3}$时等号成立.

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{5b}$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$ ....（10 分）