

7. 在某项建造任务中,需 6 名航天员在天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱这三个舱内同时进行工作,由于空间限制,每个舱至少 1 人,至多 3 人,则不同的安排方案共有

- A. 450 种 B. 180 种 C. 720 种 D. 360 种

8. 已知 $a=e^{-\frac{1}{2023}}$, $b=\frac{2022}{2023}$, $c=1+\ln\frac{2022}{2023}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $b < a < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 在复平面内,复数 z 对应的点为 $(-1, 2)$, 则

- A. $z + \bar{z} = -2$ B. $z^2 = 5$
C. $z\bar{z} = 5$ D. $\frac{z}{1-i} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

- A. 若 $\{3^n\}$ 为等比数列, 则 $\{a_n\}$ 为等差数列
B. 若 $\{\ln a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{a_n\}$ 为等比数列
C. 若 $S_n = n^2 + 2n + 3$, 则 $\{a_n\}$ 为等差数列
D. 若 $S_n = 3^n - 1$, 则 $\{a_n\}$ 为等比数列

11. 已知 $(x^2 + \frac{a}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中第 4 项与第 7 项的二项式系数相等, 且展开式的各项系数之和为 0, 则

- A. $n=9$
B. $(x^2 + \frac{a}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中有理项有 5 项
C. $(x^2 + \frac{a}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中偶数项的二项式系数和为 512
D. $(7-a)^n$ 除以 9 余 8

12. 已知 8 只小白鼠中有 1 只患有某种疾病, 需要通过血液化验来确定患这种病的小白鼠, 血液化验结果呈阳性的为患病小白鼠, 下面是两种化验方案: 方案甲: 将 8 只小白鼠的血液逐个化验, 直到查出患病小白鼠为止. 方案乙: 先取 4 只小白鼠的血液混在一起化验, 若呈阳性, 则对这 4 只小白鼠的血液再逐个化验, 直到查出患病小白鼠; 若不呈阳性, 则对剩下的 4 只小白鼠再逐个化验, 直到查出患病小白鼠. 则下列结论正确的是

- A. 若用方案甲, 化验次数为 2 次的概率为 $\frac{1}{8}$
B. 若用方案乙, 化验次数为 3 次的概率为 $\frac{1}{8}$
C. 若用方案甲, 平均化验次数为 4
D. 若平均化验次数少的方案好, 则方案乙比方案甲好

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若随机变量 $X \sim N(4, \sigma^2)$, 且 $P(X < 1) = 0.18$, 则 $P(X \leq 7) =$ _____.

14. 已知 $\mathbf{a} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

15. 粽, 即粽粒, 俗称粽子, 主要材料是糯米、馅料, 用箬叶(或箬叶、籐古子叶等)包裹而成, 形状多样, 主要有尖角状、四角状等. 粽子由来久远, 最初是用来祭祀祖先神灵的贡品. 某地流行的四角状的粽子, 其形状可以看成是一个棱长为 8 cm 的正四面体, 现需要在粽子内部放入一个肉丸, 肉丸的形状近似地看成球, 则这个肉丸的体积的最大值是 _____ cm^3 .

16. 已知圆 C 上的任意一点到两个定点 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ 的距离之比为 $\sqrt{3}$, 则圆 C 的方程是 _____; 在直线 $l: 3x + 4y + m = 0$ 上存在点 P 满足: 过 P 作圆 C 的切线, 切点分别为 M , N , 且四边形 $PMCN$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 + 2a_4 = 30$, $S_8 = 100$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{6}$.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a - c = 2c \cdot \cos B$.

(1) 若 $b = 4\sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$, 求 a ;

(2) 若角 $A = \frac{\pi}{2}$, 求角 C .

19. (本小题满分 12 分)

为丰富师生的课余文化生活, 倡导“每天健身一小时, 健康生活一辈子”, 深入开展健身运动, 增强学生的身体素质和团队的凝聚力, 某中学将举行趣味运动会. 某班共有 8 名同学报名参加“四人五足”游戏, 其中男同学 4 名, 女同学 4 名. 按照游戏规则, 每班只能选 4 名同学参加这个游戏, 因此要从这 8 名报名的同学中随机选出 4 名.

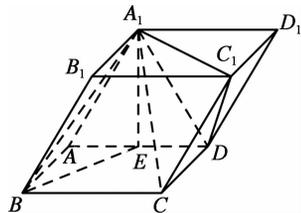
(1) 求选出的 4 名同学中有男生的概率;

(2) 记选出的 4 名同学中女同学的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

20. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形,平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$,点 E 是 AD 的中点, $A_1A=A_1D=AD=2AB=2$.

- (1) 求证:平面 $A_1EB \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求直线 A_1D 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 M 是 C 上任意一点, 且 $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $8 + 4\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 点 P 是椭圆 C 上一点且在第四象限, $PF_2 \perp F_1F_2$, 过点 P 作倾斜角互补的两条不同直线分别与椭圆 C 交于点 A, B (A, B 与 P 不重合), 试判断直线 AB 的斜率是否为定值, 并证明你的结论.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $l: x - 2y + 4 = 0$ 垂直.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若对任意实数 $x, f(x) \geq -x^2 - 3 + 2b$ 恒成立, 求整数 b 的最大值.