姓名________ 座位号______________________________

（在此卷上答题无效）

数　学（理科）

本试卷共4页，全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z=\frac{1+3i}{2-i}$，则 $|z|=$

A. 3　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|(x-1)(3-x)\leqslant 0\}$，$B=\{x|2^x<4\}$，则集合 $(\complement_U A)\cap B$ 等于

A. $(1,2)$　　B. $(2,3]$　　C. $(1,3)$　　D. $(2,3)$

3. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|-x>0$；命题 q："$a>b$"是"$\ln a>\ln b$"的充要条件，则

A. $(\neg p)\vee q$ 为真命题　　B. $p\vee q$ 为真命题

C. $p\wedge q$ 为真命题　　D. $p\wedge(\neg q)$ 为假命题

4. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，则 $(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-m|}-2$，设 $a=f\left(\log_3\frac{1}{3}\right)$，$b=f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$，$c=f(m)$，则

A. $c<a<b$　　B. $a<c<b$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

6. 两千多年前，古希腊著名数学家欧几里得把素数（即质数）看作数学中的原子。长期以来，人们在研究素数的过程中取得了及其丰硕的成果，如哥德巴赫猜想、梅森素数等。对于如何判断一个大于1的自然数 n_0 是否为素数，某数学爱好者设计了如图所示的程序框图，则空白的判断框内应填入的最优判断条件为

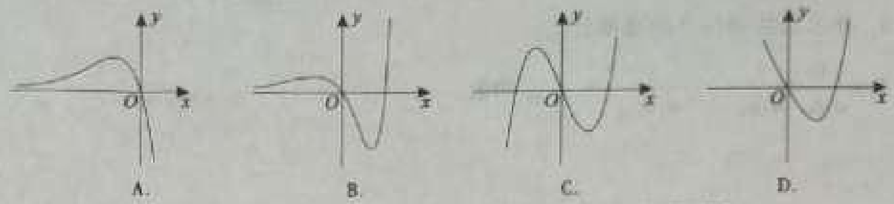
A. $i\leqslant k$？　　B. $i\leqslant k-1$？

C. $i\geqslant k$？　　D. $i\geqslant k-1$？

7. 设等比数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，已知$S_3=8$，$S_6=7$，则$a_7+a_8+a_9$等于

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{57}{8}$　　D. $\frac{55}{8}$

8. 函数$f(x)=(x^2-2x)e^x$的图象大致是



9. 已知关于x的不等式$ax^2-2x+4a<0$在$(0,2]$上有解，则实数a的取值范围是

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(2,+\infty)$

10. 已知$\omega>0$，函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\omega x\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，则$\omega$的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right]$

11. 在棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为线段C_1D_1的中点，若三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上，则球O的表面积为

A. 40π　　B. 41π　　C. 42π　　D. 48π

12. 已知函数$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2}-x+a\ln x$，当$x>1$时$f(x)\geq 0$恒成立，则实数$a$的取值范围为

A. $[e-1,+\infty)$　　B. $[e^2-2,+\infty)$　　C. $[e,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知角α的顶点与坐标原点重合，始边与x轴的非负半轴重合，若点$P(-3,4)$在角α的终边上，则$\sin 2\alpha=$________.

14. 已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geq 0\\x+y-4\leq 0\\y\geq 1\end{cases}$，则$z=2^{2x-y}$的最大值为________.

15. 已知函数$f(x)$的图象经过点$(0,-2)$，若函数$y=f(x+1)-1009$为奇函数，则$f(2)=$________.

16. 已知$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$AB=3$，$AC=6$. 如图，点D为斜边BC上一个动点，将$\triangle ABD$沿AD翻折，使得平面$AB'D\perp$平面ACD. 当$BD=$________时，$B'C$取到最小值________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$S_5=25$，且$\frac{2S_n}{n}=\frac{S_{n-1}}{n-1}+\frac{S_{n+1}}{n+1}$（$n\geq 2$且$n\in \mathbf{N}^*$）.

（1）求S_n，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求$T_{2021}$的值.

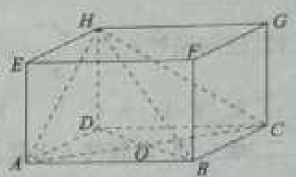
18.（12 分）

$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin B\cos C}=\frac{\sqrt{3}a}{b}$.

（1）求角C的大小；

（2）若$c=6$，且AB边上的中线$CD=4$，求$\triangle ABC$的面积.

19.（12 分）



如图，在棱柱$ABCD-EFGH$中，$AE\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为平行四边形且$AB=2AD=2AE=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$.

（1）证明：平面$BDH\perp$平面BCH；

（2）求二面角$C-AH-D$的余弦值.

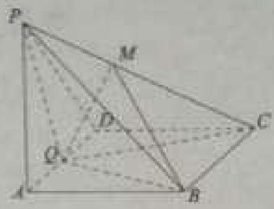
20.（12 分）

已知函数$f(x)=ae^x-\frac{x}{e^x}-1$（其中$a>0$，$e$是自然对数的底数）.

（1）当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若函数$f(x)$恰好有两个零点，求实数a的取值范围.

21.（12分）



如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，Q 为 AD 的中点，$PA=PD=AD=2$.

（1）点 M 在线段 PC 上，$PM=tPC$，试确定 t 的值，使得 $PA//$平面 MQB；

（2）在（1）的条件下，若 $PB=3$，求直线 PD 和平面 MQB 所成角的正弦值.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)>\frac{2x}{e^x}$（其中 e 是自然对数的底数，$e=2.71828\cdots$）.

2021 届高三第四次联考

理数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	C	C	B	A	B	A	C	B	D

1.【解析】$z=\frac{1+3i}{2-i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{5}=\frac{-1+7i}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$,则$|z|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{49}{25}}=\sqrt{2}$。

2.【解析】因为$\complement_U A=\{x|(x-1)(3-x)>0\}=\{x|1<x<3\}$，又因为$B=\{x|x<2\}$.

所以$(\complement_U A)\cap B=\{x|1<x<2\}$，故选 A。

3.【解析】$|x+1|-x>0\Leftrightarrow|x+1|>x$，$x<0$时右边负数显然成立，$x\geq0$时$x+1>x$也成立，所以命题$p$是真命题．对于命题$q$，当$a=0$时$\ln a$没有意义，命题 q 是假命题．所以$(\neg p)\vee q$为假命题，A 错误；$p\vee q$为真命题，B 正确；$p\wedge q$为假命题，C 错误；$p\wedge(\neg q)$为真命题，D 错误。故选 B。

4.【解析】由$|\vec{a}+2\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\therefore(4\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=3$.

5.【解析】由$f(x)$是偶函数得$m=0$，$f(x)=(\frac{1}{2})^{|x|}-2$，在$(0,+\infty)$上单调递减。又$0<(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}<1$，$\log_3\frac{1}{3}=-1$，

所以 $c=f(0)>b=f((\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}})>a=f(-1)=f(1)$ 。

6.【解析】假如n是合数，它必有一个约数a，使得$a\times b=n$，且a、b两个数中必有一个大于或者等于$\sqrt{n}$，另一个小于或者等于$\sqrt{n}$，所以只要小于或者等于$\sqrt{n}$的数(1除外)，不能整除n，则n必是素数，应填入$i\leq k-1?$，故选 B。

7.【解析】$S_6=S_3+q^3S_3=8+8q^3=7\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}$，$\frac{a_7+a_8+a_9}{a_1+a_2+a_3}=q^6=\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}\Rightarrow a_7+a_8+a_9=\frac{1}{8}$

8.【解析】函数有且只有 2 个零点，排除 AC，求导可得函数有极大值和极小值，故选 B。

9.【解析】$x\in(0,2]$时，不等式可化为$a<\frac{2x}{x^2+4}=\frac{2}{x+\frac{4}{x}}$；令$f(x)=\frac{2}{x+\frac{4}{x}}$，则$a<f(x)_{\max}=\frac{2}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,\frac{1}{2})$.

10.【解析】由题意$\pi-\frac{\pi}{2}\leq\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{2}\Rightarrow0<\omega\leq2$，$f(x)=\cos(\frac{\pi}{4}-\omega x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$，求导

$f'(x)=\omega\bullet\cos(\omega x+\frac{\pi}{4})$，于是$\cos(\omega x+\frac{\pi}{4})\leq0$在区间$(\frac{\pi}{2},\pi)$上恒成立，注意

$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\pi\omega+\frac{\pi}{4}\le 2\pi+\frac{\pi}{4}$，所以 $\left(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，因此

$\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega\ge\frac{1}{2}$ 且 $\pi\omega+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega\le\frac{5}{4}$，所以 ω 的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{5}{4}]$.

11.【解析】分别以 $\overline{AB}$，$\overline{AD}$，$\overline{AA_1}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$C(4,4,0)$，$P(2,4,4)$，设 $\triangle ABC$ 的外心为 M，则 $M(2,2,0)$，

设球 O 的球心为 $O(2,2,h)$，半径为 R，则 $|OA|=|OP|=R$，所以 $R^2=4+4+h^2=4+(4-h)^2$，

解得 $h=\frac{3}{2}$，所以 $R^2=\frac{41}{4}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=41\pi$，故选 B.

12.【解析】因为 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x^2}-x+a\ln x=e^{x-1-2\ln x}-x+a\ln x\ge x-2\ln x-x+a\ln x=(a-2)\ln x\ge 0$

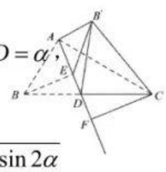
在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，因此 $a-2\ge 0\Rightarrow a\ge 2$，故选 D。注意不等式 $e^{x-1-2\ln x}\ge x-2\ln x$ 等号可以成立。

13.【答案】$-\frac{24}{25}$【解析】由题设 $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin 2\alpha=2\times\frac{4}{5}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$

14.【答案】32【解析】约束条件表示的区域是以 $(1,1),(2,2),(3,1)$ 为顶点的三角形，目标函数在 $(3,1)$ 处取最大值。

15.【答案】2020【解析】函数 $y=f(x+1)-1009$ 为奇函数，所以函数 $f(x)$ 得图像关于 $(1,1009)$ 对称，故有 $f(x)+f(2-x)=2018$，由已知 $f(0)=-2$，则 $f(2)=2020$.

16.【答案】$\sqrt{5}$，$3\sqrt{3}$（第一问 3 分，第二问 2 分）【解析】设 $\angle BAD=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，作 $BE\perp AD$ 或 AD 的延长线于 E 点，作 $CF\perp AD$ 或 AD 的延长线于 F 点，则 $\angle ACF=\angle BAD=\alpha$，



$BE=3\sin\alpha$，$AE=3\cos\alpha$，$CF=6\cos\alpha$，$AF=6\sin\alpha$

$\therefore EF=|AF-AE|=|6\sin\alpha-3\cos\alpha|$，$\therefore B'C=\sqrt{BE^2+CF^2+EF^2}=\sqrt{45-18\sin 2\alpha}$

$\therefore$ 当 $\sin 2\alpha=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$B'C_{\min}=3\sqrt{3}$，此时 AD 是角平分线。由角平分线定理或者面积比可得 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow BD=\frac{1}{3}BC=\sqrt{5}$.

17.【解析】（1）$\frac{S_1}{1}=1,\frac{S_5}{5}=5$，又 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，所以首项是 1，公差是 1，$\frac{S_n}{n}=n$

即 $S_n=n^2$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1(n>1\text{时})$，显然 $n=1$ 也符合。

所以 $a_n=2n-1(n\in N^*)$。……………………………………………………………………5 分

（2）$T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$，

所以 $T_{2021}=\frac{2021}{2\times2021+1}=\frac{2021}{4043}$ ……………………………………………………………10 分

18.【解析】(1) 因为 $\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin B\cos C}=\frac{\sqrt{3}a}{b}$，由正弦定理，得 $\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin B\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B}$，

所以 $\frac{-\cos(A+C)+\cos A\cos C}{\sin B\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B}$. 所以 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C$.

又因为 $\sin A\neq0$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$. 因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ ……………………………6 分

（2）因为 $\cos\angle BDC+\cos\angle ADC=0$，所以 $\frac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4}+\frac{3^2+4^2-b^2}{2\times3\times4}=0$，得 $a^2+b^2=50$；

又因为 $a^2+b^2-6^2=2ab\cos\frac{\pi}{3}=ab$，所以 $ab=14$，所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$。……12 分

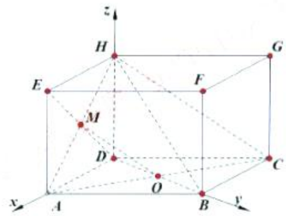
19.【解析】(1) 在 $\triangle ABD$ 中，$AB=2,AD=1,\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

$BD^2=4+1-2\times1\times2\cos\frac{\pi}{3}=3\Rightarrow BD^2+AD^2=AB^2$，……………………………………………………3 分

$\Rightarrow AD\perp BD$，由 $AE\perp$ 平面 $ABCD\Rightarrow DH\perp$ 平面 $ABCD\Rightarrow DH\perp AD$，所以 $AD\perp$ 平面 BDH，

又 $AD//BC$，所以 $BC\perp$ 平面 BDH，而 $BC\subseteq$ 平面 BCH，所以平面 $BDH\perp$ 平面 BCH。……………6 分

（2）由（1）知 DA,DC,DH 两两互相垂直，建立如图所示



空间直角坐标系，$D(0,0,0),A(1,0,0),C(-1,\sqrt{3},0),H(0,0,1)$

易知 $\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{3},0)$ 是平面 ADH 的法向量；

$\overrightarrow{AC}=(-2,\sqrt{3},0),\overrightarrow{AH}=(-1,0,1)$，设平面 ACH 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+\sqrt{3}y=0\\ -x+z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$ 得 $y=2,z=\sqrt{3}$，于是 $\vec{n}=(\sqrt{3},2,\sqrt{3})$

设二面角 $C-AH-D$ 的平面角为 θ（由图知为锐角），则 $\cos\theta=\cos\langle\overrightarrow{DB},\vec{n}\rangle=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$。…12 分

20.【解析】(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=2e^x-\frac{x}{e^x}-1$，所以 $f'(x)=2e^x-\frac{1-x}{e^x}$，

所以 $f'(0)=2-1=1$. 又 $f(0)=2-1=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=x$，即 $x-y+1=0$. ………………………4 分

（2）问题等价于 $g(x)=\frac{1}{e^x}(\frac{x}{e^x}+1)$ 的图象和直线 $y=a$ 恰好有 2 个交点，求 a 的取值范围.

令 $g(x)=\frac{1}{e^x}(\frac{x}{e^x}+1)$，则 $g'(x)=\frac{1-2x-e^x}{e^{2x}}$. 令 $h(x)=1-2x-e^x$， ……………………………6 分

则 $h'(x)=-2-e^x<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 又 $h(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

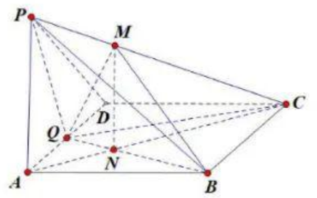
$\therefore g(x)$ 的极大值即最大值为 $g(0)=1$. ……………………………………………………………10 分

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$g(x)\in(-\infty,1]$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\in(0,1)$.

$\therefore$ 当 $a\in(0,1)$ 时，$g(x)=\frac{1}{e^x}(\frac{x}{e^x}+1)$ 的图象和直线 $y=a$ 恰好有 2 个交点，

函数 $f(x)$ 恰好有两个零点。 ……………………………………………………………………12 分

21.【解析】（1）当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$PA//$ 平面 MQB.



连接 AC 交 BQ 于点 N，

连接 MN，由题设 $AQ//BC, AQ=\frac{1}{2}BC$，得 $AN=\frac{1}{3}AC$.

若 $PA//$ 平面 MQB，由平面 $PAC\cap$ 平面 $MQB=MN$，

得 $PA//MN$，于是 $PM=\frac{1}{3}PC$，$t=\frac{1}{3}$。

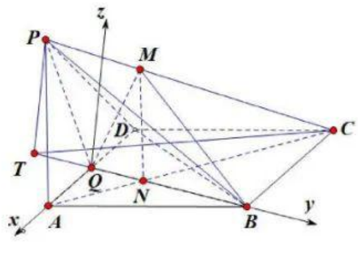
当 $t=\frac{1}{3}$，$\frac{PM}{PC}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow PA//MN\Rightarrow PA//$平面$MQB$。（这一步没有扣 2 分） ……………………4 分

（2）连接 BD，由题设 $\triangle ABD,\triangle PAD$ 都是等边三角形，

Q 是 AD 中点，$PQ\perp AD, BQ\perp AD, AD\perp$ 平面PQB.

$PQ=BQ=\sqrt{3}, PB=3$，在 $\triangle PQB$ 中，$\cos\angle PQB=\frac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\angle PQB=\frac{2\pi}{3}$。 ……………6 分

在平面 PQB 内作 $PT\perp QB$ 于 T，则 $\angle PQT=\frac{\pi}{3}$，



$PT=PQ\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}, QT=PQ\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

由 $AD\perp$ 平面$PQB\Rightarrow AD\perp PT$，可得 $PT\perp$ 平面$ABCD$。

以点 Q 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

可得各点坐标如下

$Q(0,0,0), A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), C(-2,\sqrt{3},0), D(-1,0,0), P(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$，

由$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$可得$M(-\frac{2}{3},0,1)$，所以$\overrightarrow{QM}=(-\frac{2}{3},0,1),\overrightarrow{QB}=(0,\sqrt{3},0)$，…………………………………8 分

设平面MQB的法向量$\vec{e}=(x,y,z)$，则

$\overrightarrow{QM}\cdot\vec{e}=-\frac{2}{3}x+z=0,\overrightarrow{QB}\cdot\vec{e}=\sqrt{3}y=0$，可取$x=3,y=0,z=2$，法向量$\vec{e}=(3,0,2)$

直线PD的方向向量$\overrightarrow{PD}=(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$，

直线PD和平面MQB所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PD},\vec{e}>|=|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\vec{e}}{|\overrightarrow{PD}|\times|\vec{e}|}|=|\frac{-3-3}{2\times\sqrt{13}}|=\frac{3}{13}\sqrt{13}$

所以直线PD和平面MQB所成角的正弦值等于$\frac{3}{13}\sqrt{13}$．…………………………………………12 分

22. 【解析】(1) 定义域是$(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，

令$u(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$，则$u'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，

所以$u(x)$在$(0,1)$递增，在$(1,+\infty)$递减，

故$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，$u(x)<u(1)=0$，也即$f'(x)<0$，

因此$f(x)$在$(0,1)$上单调递减；在$(1,+\infty)$上也单调递减；…………………………………………4 分

(2) 先证$e^x\geq ex$，令$h(x)=e^x-ex\Rightarrow h'(x)=e^x-e=0\Rightarrow x=1$，

在$(-\infty,1)$上$h'(x)<0$，在$(1,+\infty)$上$h'(x)>0$，

因此$x=1$是$h(x)$唯一的极小值点，$h(1)=0$，所以$h(x)=e^x-ex\geq h(1)=0$，故$e^x\geq ex$。………6 分

记$g(x)=\ln x-\frac{2x(x-1)}{e^x}$，

则$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x^2-6x+2}{e^x}=\frac{e^x+2x(x^2-3x+1)}{xe^x}=\frac{2x(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{2}x+e^x}{xe^x}>\frac{2x(x-\frac{3}{2})^2+(e-\frac{5}{2})x}{xe^x}>0$，……9 分

$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g(1)=0$。

在区间$(0,1)$上$g(x)=\ln x-\frac{2x(x-1)}{e^x}<g(1)=0\Rightarrow\ln x<\frac{2x(x-1)}{e^x}\Rightarrow\frac{\ln x}{x-1}>\frac{2x}{e^x}$；

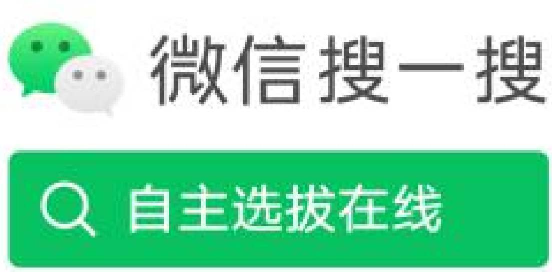
在区间$(1,+\infty)$上$g(x)=\ln x-\frac{2x(x-1)}{e^x}>g(1)=0\Rightarrow\ln x>\frac{2x(x-1)}{e^x}\Rightarrow\frac{\ln x}{x-1}>\frac{2x}{e^x}$；

综上所述，$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}>\frac{2x}{e^x}$成立。…………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》