

2024 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣高二联考答案
数学(人教版☆)

1.D 【解析】因为 $k = \frac{\sin 2}{\cos 2} = \tan 2, 2 \in [0, \pi)$, 故 $\alpha = 2$.

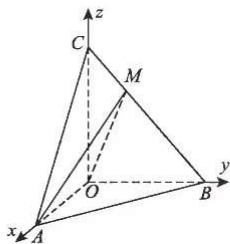
故选 D.

2.C 【解析】设数列的首项为 a_1 , 公差为 d ,

则 $S_{30} - S_{20} = 30a_1 + 15 \times 29d - (20a_1 + 10 \times 19d) = 100$,

化简得 $2a_1 + 49d = 20, S_{50} = 50a_1 + \frac{50 \times 49}{2}d = 25(2a_1 + 49d) = 500$. 故选 C.

3.A 【解析】根据题意, 以 O 为原点, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 方向分别作为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图,



则 $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), M(0, 1, \frac{8}{3})$,

设平面 OMA 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OM} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x = 0, \\ y + \frac{8}{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $z = 3$, 则 $\mathbf{m} = (0, -8, 3)$, 点 B 到平面 OMA 的距

$$\text{离 } d = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{24}{\sqrt{73}} = \frac{24\sqrt{73}}{73}.$$

故选 A.

4.A 【解析】由题意易知直线 l 的斜率一定存在, 斜率设为 k , 则直线 l 的方程为 $y - 3 = k(x - 1)$, 分别与 $y = x, y = -x$ 联立可得 A, B 两点的横坐标: $x_A = \frac{3-k}{1-k}, x_B = \frac{k-3}{k+1}$, 故 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} |x_A| \cdot \sqrt{2} |x_B| = |x_A x_B| = \left| \frac{k-3}{k+1} \cdot \frac{3-k}{1-k} \right|$, A, B 两点都在 x 轴的上方, 故 $-1 < k < 1$,

$$S_{\triangle AOB} = \frac{3-k}{k+1} \cdot \frac{3-k}{1-k} = \left[1 + \frac{2(1-k)}{k+1} \right] \cdot$$

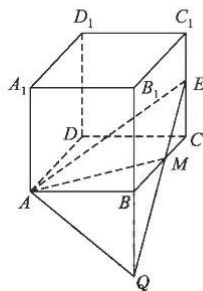
$$\left[2 + \frac{1+k}{1-k} \right] = 2 + 2 + \frac{4(1-k)}{k+1} + \frac{1+k}{1-k} \geq 8, \text{ 当且仅当}$$

$\frac{4(1-k)}{k+1} = \frac{1+k}{1-k}$, 即 $k = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 故 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 8. 故选 A.

5.B 【解析】易知曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的实轴是 $y = x$, 实轴与

渐近线的夹角为 45° , 故 $\frac{b}{a} = 1, y = x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的一个交点坐标 $(1, 1)$ 与曲线对称中心 $(0, 0)$ 的距离 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, 故曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的焦点坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 故选 B.

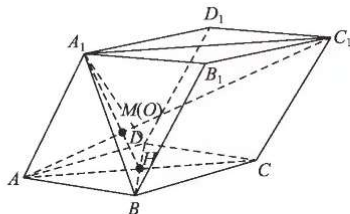
6.C 【解析】由题意知, $A_1N \parallel$ 平面 AME , 延长 EM, B_1B 交于点 Q , 如图,



则 $A_1N \parallel AQ$, 易知 $\triangle BQM \sim \triangle CEM$, 则 $\frac{BQ}{EC} = \frac{BM}{MC} =$

2, 则 $BQ = 2EC = BB_1 = AA_1$, 故可知, 点 N 与点 B 重合, $\lambda = 1$. 故选 C.

7.D 【解析】根据题意, 连接 AC, BD 交于点 H , 连接 A_1H 与 AC_1 交于点 O , 如图,



在平行六面体中, $\triangle OAH \sim \triangle OC_1A_1$, 则 $AO = \frac{1}{2}OC_1$, 根据平面的基本性质易知点 M 与点 O 重合, 故 $\overrightarrow{C_1M} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1A}$, $\overrightarrow{C_1M}^2 = \frac{4}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \frac{4}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{4}{9}(4 \times 3 + 4 \times 3) = \frac{32}{3}$, $|\overrightarrow{C_1M}| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

8.C 【解析】根据题意设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$,

$C\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right)$, 则 $k_{AB} + k_{AC} = 0$, 即 $\frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} + \frac{y_1 - y_3}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_3^2}{4}} = 0$,

0, 则 $\frac{4}{y_1 + y_2} + \frac{4}{y_1 + y_3} = 0$, 化简得 $2y_1 + y_2 + y_3 = 0$,

$k_{BC} = \frac{y_2 - y_3}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_3^2}{4}} = \frac{4}{y_2 + y_3} = -\frac{4}{2y_1} = -\frac{2}{y_1}$,

故 $k_{AB} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{y_1}{2} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 1}$, 解得 $y_1^2 = 12$, $k_{AC} =$

$-k_{AB} = -\frac{y_1}{2}$, 则直线 AC 方程为 $y - y_1 =$

$-\frac{y_1}{2}\left(x - \frac{y_1^2}{4}\right)$, 令 $y = 0$ 得 $m = 2 + \frac{y_1^2}{4} = 5$. 故选 C.

9.AC 【解析】对于 A: 点 M 在 $\odot O$ 内, 故 $x_0^2 + y_0^2 < 1$, A 正确;

对于 B: 点 O 到直线 $x_0x + y_0y = 1$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 1$, 故直线与圆相离, B 错误;

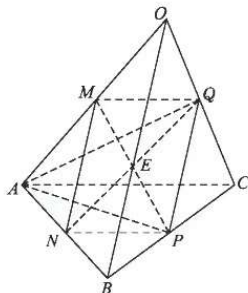
对于 C: 弦与 OM 垂直时, 过 $M(x_0, y_0)$ 的弦长最小为 $2\sqrt{1 - |OM|^2} = 2\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$, C 正确;

对于 D: $\odot O'$ 的圆心为 $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$, 半径为 $\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}$,

$|OO'| = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2} \neq 1 - \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2}$. 故 D 错误.

故选 AC.

10.ABC 【解析】对于 A: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 可化为 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 可化为 $\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = 0$, 两式相减得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, 即 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, 故 A 正确; 对于 B: 连接 MN, NP, PQ, QM , 如图,



易证 $MN \parallel OB \parallel PQ$, 且 $MN = \frac{1}{2}OB = PQ$, 故

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, 则四边形 $MNPQ$ 为平行四边形, 故 B 正确; 对于 C: 由 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AC}|$ 可知, 平行四边形 $MNPQ$ 为菱形, 故 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$, 故 C 正确;

对于 D: $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QN}$, 两向量不共线, $\overrightarrow{PM} \neq \overrightarrow{QN}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11.ACD 【解析】列出数列的前 n 项: $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{1}$,

$a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{5}{3}, a_5 = \frac{8}{5}, a_6 = \frac{13}{8} \dots$, 对于 A, 当

$n = 1$ 时, $a_2 > a_3, a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2}} = 1 +$

$\frac{a_2}{a_2 + 1} = 2 - \frac{1}{a_2 + 1}$, 同理, $a_5 = 2 - \frac{1}{a_3 + 1}, a_2 > a_3 \Rightarrow$

$a_4 > a_5 \Rightarrow a_6 > a_7 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{2n} > a_{2n+1} \Rightarrow \dots$, A 正确; 对于 B, 当 $n = 1$ 时, B 错误; 对于 C, $a_n a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = a_n + 1 \geq 2$, C 正确; 对于 D, 数列各项化为约

分数可得, 分子依次为斐波那契数列 $\{b_n\}$ 的各项,

$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, \dots$, 分母从第二项依次取 $b_1,$

$b_2, b_3, \dots$, 故 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = b_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \dots \cdot$

$\frac{b_n}{b_{n-1}} = b_n$, 列出斐波那契数列的项: 1, 2, 3, 5, 8, 13,

21, 34, 55, 89, 144, $\dots$, 可知要满足 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n <$

100, 则 n 最大取 10, D 正确.

故选 ACD.

12.AC 【解析】前 $n-1$ 行共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个数, 第 n 行第

1 个数为数列的第 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 项, 即

$2\left[\frac{n(n-1)}{2} + 1\right] - 1 = n^2 - n + 1$, 故 A 正确;

第 n 行最后 1 个数为 $n^2 - n + 1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1$, 故 B 错误;

由等差数列求和公式得, 数列第 n 行和为

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2} \cdot n = n^3, C \text{ 正确};$$

前 n 行共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数, 最后一项为 n^2+n-1 ,

$$\text{故前 } n \text{ 行总和为 } \left(\frac{1+n^2+n-1}{2} \right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}, \frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq 2023 < 2025 = 45^2, \text{ 即}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < 45, \text{ 即 } n(n+1) < 90, \text{ 则 } n \text{ 的最大值为 } 8,$$

D 错误. 故选 AC.

13.20 【解析】由题意得, $10a_1 + 45d + 20a_1 + 240d = 30$, 即 $15(2a_1 + 19d) = 30$,

化简得 $2a_1 + 19d = 2$, 则 $S_{20} = 20a_1 + 190d = 10(2a_1 + 19d) = 20$.

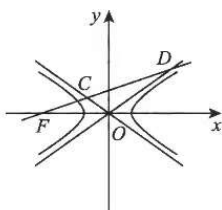
14. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ 【解析】根据题意, 过焦点的直线方程可设为

$$y = k(x+2), y = k(x+2) \text{ 与 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ 联立得,}$$

$$x_C = \frac{-6k}{3k+\sqrt{3}},$$

$$y = k(x+2) \text{ 与 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ 联立得, } x_D = \frac{6k}{\sqrt{3}-3k},$$

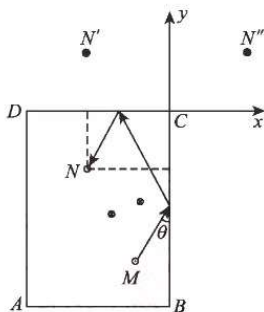
如图,



$$|OD| = 2|OC|, \frac{6k}{\sqrt{3}-3k} = 2 \cdot \frac{6k}{3k+\sqrt{3}}, \text{ 解得}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

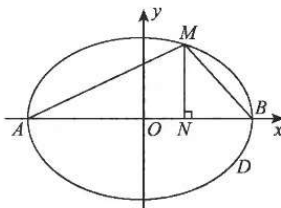
15. $\frac{9}{14}$ 【解析】以 C 为原点, DC, BC 边分别为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系, 如图,



则 $N(-120, -80), M(-60, -200), N$ 关于 x 轴的对称点为 $N'(-120, 80), N'$ 关于 y 轴的对称点为 $N''(120, 80)$, 直线 MN'' 方向为本球射出方向, 故

$$\tan \theta = \frac{9}{14}.$$

16. $\frac{2\sqrt{22}}{11}$ 【解析】设 $MN \perp AB$ 于点 N , 如图,



$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} |AM| |BM| \sin 120^\circ = \frac{1}{2} |AB| \cdot$$

$$|MN|, \text{ 得 } |MN| = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$\text{设 } \angle MAB = \alpha, \angle MBA = \beta, |AN| = m, \frac{1}{\tan \alpha} =$$

$$\frac{|AN|}{|MN|} = \frac{4m}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{\tan \beta} = \frac{|BN|}{|MN|} = \frac{4(2a-m)}{\sqrt{3}a},$$

$$\text{则 } \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{8}{\sqrt{3}}, \text{ 即 } \tan \alpha + \tan \beta = \frac{8}{\sqrt{3}} \tan \alpha \tan \beta,$$

$$\text{又 } \sqrt{3} = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} =$$

$$\frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \text{ 解得 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{3}{11}, \text{ 即 } k_{MA} \cdot k_{MB} =$$

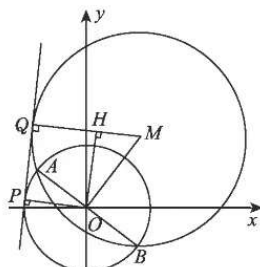
$$\tan \alpha (-\tan \beta) = -\frac{3}{11},$$

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } \frac{y_0}{x_0+a} \cdot \frac{y_0}{x_0-a} = -\frac{3}{11}, \text{ 即 } \frac{y_0^2}{x_0^2-a^2} =$$

$$-\frac{3}{11}, \text{ 而 } y_0^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2 = -\frac{b^2}{a^2} (x_0^2 - a^2), \text{ 则 } -\frac{b^2}{a^2} =$$

$$-\frac{3}{11}, e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{11}, \text{ 则 } e = \frac{2\sqrt{22}}{11}.$$

17. 解: (1) 作 $OH \perp MQ$ 于点 H , 如图,



$$\text{易知 } |OH| = |PQ| = 2\sqrt{3}, |QH| = |PO| = 3,$$

则 $|HM| = 5 - 3 = 2$, 根据勾股定理易得 $|OM| = 4$,

又 $|OA| = 3$, $|MA| = 5$, 则 $\angle AOM = 90^\circ$, 同理, $\angle BOM = 90^\circ$, 故直线 AB 过 O 点, $|AB| = 6$.

(2) 点 $(1, 1)$ 到直线 $ax + by + \sqrt{2} = 0$ 距离设为 d , 则

$$d = \frac{|a + b + \sqrt{2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

点 $M(a, b)$ 满足 $|OM| = 4$, 即 $a^2 + b^2 = 16$,

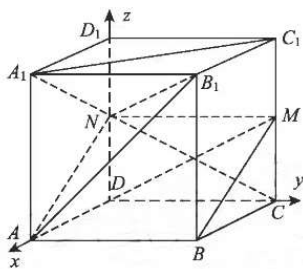
根据基本不等式得, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 32$,

则 $-4\sqrt{2} \leq a + b \leq 4\sqrt{2}$,

则 $|a + b + \sqrt{2}| \leq 5\sqrt{2}$,

则 $d \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 当且仅当 $a = b = 2\sqrt{2}$ 时, d 取最大值 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

18. 解: (1) 设 $AA_1 = m$, 以 D 为原点, 以 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别作为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 如图,



则 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $A_1(2, 0, m)$,

$M(0, 3, \frac{m}{2})$, $C_1(0, 3, m)$,

$\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 3, -m)$, $\overrightarrow{BM} = (-2, 0, \frac{m}{2})$,

$\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{BM} = 4 - \frac{m^2}{2} = 0$, 解得 $m = 2\sqrt{2}$,

故 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{DM} = (0, 3, \sqrt{2})$,

$\cos \langle \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{A_1C_1}| |\overrightarrow{DM}|} = \frac{9}{\sqrt{13} \times \sqrt{11}} =$

$$\frac{9\sqrt{143}}{143}.$$

则异面直线 A_1C_1 与 DM 所成角的余弦值为 $\frac{9\sqrt{143}}{143}$.

(2) 取 DD_1 中点为 $N(0, 0, \sqrt{2})$, 连接 AN , B_1N , MN , 易得 $MN \parallel AB$, 则四边形 $ABMN$ 为平行四边形, 则 $AN \parallel BM$, $AN \subset$ 平面 ANB_1 , $BM \not\subset$ 平面 ANB_1 , 则 $BM \parallel$ 平面 ANB_1 ,

设点 B 到平面 ANB_1 的距离为 d ,

则 $|PQ| \geq d$, 故 d 值即为 $|PQ|$ 的最小值.

设平面 ANB_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3y + 2\sqrt{2}z = 0, \\ -2x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

取 $z = \sqrt{2}$, 则 $n = (1, -\frac{4}{3}, \sqrt{2})$,

$$d = \frac{|n \cdot \overrightarrow{AB}|}{|n|} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{16}{9} + 2}} = \frac{12\sqrt{43}}{43},$$

则 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{12\sqrt{43}}{43}$.

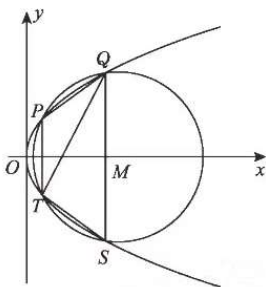
19. 解: (1) 设点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $x = my + 4$, 由题意得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 则

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 即 $\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2} + y_1y_2 = 0$, 化简得 $y_1y_2 + 4p^2 = 0$, 将 $x = my + 4$ 代入抛物线方程 $y^2 = 2px$

可得, $y^2 - 2pm y - 8p = 0$,

$y_1y_2 = -8p$, 则 $-8p + 4p^2 = 0$, 解得 $p = 2$, 抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 如图, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($y_2 > y_1 > 0$), 则 $T(x_1, -y_1)$, $S(x_2, -y_2)$,



$$k_{TQ} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 + y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{4}{y_2 - y_1} = 2, \text{ 则 } y_2 - y_1 =$$

2, 即 $2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = 2$, 则 $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} = 1$ (*),

将 $y^2 = 4x$ 代入圆 M 的方程: $(x - 4)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$),

得 $x^2 - 4x + 16 - r^2 = 0$, 此方程有两个正根等价于

$$\begin{cases} \Delta = 16 - 4(16 - r^2) > 0, \\ x_1x_2 = 16 - r^2 > 0, \\ x_1 + x_2 = 4 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 2\sqrt{3} < r < 4,$$

将 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1x_2 = 16 - r^2$ 代入 (*) 式得 $4 -$

$$2\sqrt{16 - r^2} = 1, \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{55}}{2},$$

符合 $2\sqrt{3} < r < 4$, 故圆 M 的半径为 $\frac{\sqrt{55}}{2}$.

• 数学(人教版☆)答案(第4页,共5页) •

20. 解: (1) 证明: 在梯形 AA_1C_1C 中, $S_{\triangle AA_1C_1} = \frac{1}{2} \times$

$4 \times 2 = 4$, 因为 $AA_1 = AB = AC = \frac{1}{2} A_1C_1 = 2$, 所以

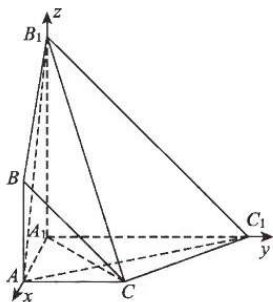
$A_1B_1 = 4$, 设点 B_1 到平面 ACC_1A_1 距离为 h ,

$V_{B_1-A_1CC_1} = \frac{1}{3} h \times 4 = \frac{16}{3}$, 解得 $h = 4 = A_1B_1$,

故 $A_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 而 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,
则 $A_1B_1 \perp CC_1$,

又 $AC = AA_1 = 2$, $\angle A_1AC = \angle AA_1C_1 = 90^\circ$, 易得
 $A_1C = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$, 又 $A_1C_1 = 4$, 则 $\angle A_1CC_1 =$
 90° , 又 $A_1B_1 \cap A_1C = A_1$, $A_1B_1, A_1C \subset$ 平面
 A_1B_1C , 则 $CC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C .

(2) 由 (1) 知, A_1A, A_1C_1, A_1B_1 两两互相垂直,
以 A_1 为原点, $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B_1}$ 方向分别为 x 轴、
 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $A_1 -$
 xyz , 如图,



则 $C(2, 2, 0), B_1(0, 0, 4), C_1(0, 4, 0), A(2, 0, 0)$,

设平面 CB_1C_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 4y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$ 得, $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$,

设平面 B_1C_1A 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4y_2 - 4z_2 = 0, \\ -2x_2 + 4y_2 = 0, \end{cases}$$

取 $y_2 = 1$, 则 $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$,

$$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2+1+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

故二面角 $C - B_1C_1 - A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

21. 解: (1) 根据椭圆定义得, $2a = |PF_1| + |PF_2| =$

$$\sqrt{2^2 + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2},$$

$c = 1, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1$, 故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} +$

$y^2 = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 方程: $y =$
 $kx + t$,

则由题意得 $\frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = 1$, 将 $y_1 = kx_1 + t$,

$y_2 = kx_2 + t$ 代入整理得:

$$(2k - 1)x_1x_2 + (t - 1)(x_1 + x_2) = 0 (*),$$

将 $y = kx + t$ 代入椭圆方程整理得 $(1 + 2k^2)x^2 +$
 $4ktx + 2t^2 - 2 = 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2},$$

代入 (*) 式得:

$$(2k - 1) \cdot \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2} + (t - 1) \cdot \frac{-4kt}{1 + 2k^2} = 0,$$

整理得 $(t - 1)(2k - t - 1) = 0$,

当 $t - 1 = 0$ 时, MN 过 B 点, 不合题意;

故 $2k - t - 1 = 0$, 直线 MN 的方程为 $y = kx + 2k -$
 $1 = k(x + 2) - 1$, 故 MN 过定点 $(-2, -1)$.

22. 证明: (1) 由题意得, $\frac{1}{a_{n-1} + 1} - \frac{1}{a_n + 1} =$

$$\frac{1}{-a_n - 2} - \frac{1}{a_n + 1} = \frac{2a_n + 3}{a_n + 1} - \frac{1}{a_n + 1} = 2,$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1,$$

故数列 $\left\{ \frac{1}{a_n + 1} \right\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公差的等差
数列.

(2) 由 (1) 知, $\frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a_1 + 1} + 2(n - 1) = 2n - 1$, 则

$$a_n = \frac{2 - 2n}{2n - 1}, |a_n| = \frac{2n - 2}{2n - 1},$$

$$|a_2| \cdot |a_3| \cdot |a_4| \cdots |a_{n+1}| = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times$$

$$\frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2n}{2n + 1},$$

由 $4n^2 - 1 < 4n^2$ 可得 $\frac{2n}{2n + 1} > \frac{2n - 1}{2n}$, 故 $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times$

$$\frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2n}{2n + 1} > \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n - 1}{2n},$$

$$\text{则 } \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2n}{2n + 1} \right)^2 > \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2n - 1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n + 1} = \frac{1}{2n + 1},$$

$$\text{则 } \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{2n}{2n + 1} > \sqrt{\frac{1}{2n + 1}}, \text{ 原不等}$$

式得证.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线