2023 届高三二轮复习联考(三)

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $z-\bar{z}=-3\mathrm{i}$.故选 B.

2.A 【解析】$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{y\mid y>0\}$,所以 $A\cap B=(0,5]$.故选 A.

3.D 【解析】令 $x=1$ 可得展开式中所有项的系数和为 $2^n=512$,所以 $n=9$,故 $T_{k+1}=\mathrm{C}_9^k(3x)^{9-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\cdot 3^{9-k}\cdot \mathrm{C}_9^k x^{9-\frac{3}{2}k}$,令 $9-\frac{3}{2}k=0$,则 $k=6$,所以展开式中的常数项为:$T_7=2\,268$.故选 D.

4.B 【解析】因为 A,B 互斥,所以 $P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)=\frac{1}{2}$,因为 $P(A|C)=\frac{1}{6}$,所以 $P(B|C)=\frac{1}{3}$,又因为 $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}$,所以 $P(C)=3P(BC)=\frac{1}{4}$.故选 B.

5.C 【解析】易知圆心 $C(2,2)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点为 $C'(-2,-2)$,设反射光线所在的直线斜率为 k,则反射光线所在的直线方程为 $kx-y+2k-2=0$,所以 $\frac{|4k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}$,整理得 $k^2-4k+1=0$,解得 $k=2+\sqrt{3}$ 或 $k=2-\sqrt{3}$.故选 C.

6.D 【解析】解法一:设点 C 到平面 PAB 的距离为 h,则 $V_{P-ABC}=V_{C-PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot h=\frac{1}{6}h$,显然,当 $AC\perp$ 平面 PAB 时,$h_{\max}=AC=1$,此时三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{6}$.故选 D.

解法二:因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC,$AB\perp AC$,所以 $AB\perp$ 平面 PAC,故 $AB\perp PA$,设 $PA=x\left(\frac{1}{3}<x<1\right)$,则 $\frac{1}{2}PA\cdot AB=\frac{1}{2}$,得 $AB=\frac{1}{x}$,设 $\angle PAC=\theta$.在 $\triangle PAC$ 中,$\cos\theta=\frac{x^2+1-4x^2}{2\times1\times x}=\frac{1-3x^2}{2x}$,所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2x}\sqrt{-9x^4+10x^2-1}$,所以 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}x\times\frac{1}{2x}\sqrt{-9x^4+10x^2-1}=\frac{1}{4}\sqrt{-9x^4+10x^2-1}$,$V_{P-ABC}=V_{B-PAC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{4}\sqrt{-9x^4+10x^2-1}=\frac{1}{12}\sqrt{10-\left(9x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\leqslant\frac{1}{12}\sqrt{10-2\sqrt{9x^2\times\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{6}$,当且仅当 $9x^2=\frac{1}{x^2}$,即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立,所以三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{6}$.故选 D.

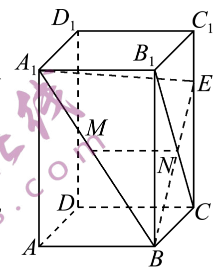
7.B 【解析】由题 $10^{2a}+b=2.8$,$10^{4a}+b=2.64$,得 $10^{4a}-10^{2a}+0.16=0$,解得 $10^{2a}=0.2$ 或 $10^{2a}=0.8$,当 $10^{2a}=0.2$ 时,$b=2.6$,不合题意舍去,当 $10^{2a}=0.8$ 时,$b=2$,所以 $y=10^{ax}+2$,当 $x=1$ 时,$y=10^a+2=\sqrt{0.8}+2=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx2.894$,所以在上市第 1 个月时,该款电子产品的售价约为 2.894 万元.故选 B.

8.A 【解析】双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$,若 $y_1y_2>0$ 恒成立,则 A,B 两点始终位于 x 轴同侧,则 $0<\angle AOB\leqslant\frac{\pi}{2}$,故 $\frac{a}{b}\geqslant1$,即 $a\geqslant b$,即 $a^2\geqslant c^2-a^2$,得 $e=\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{2}$,所以双曲线离心率的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$.故选 A.

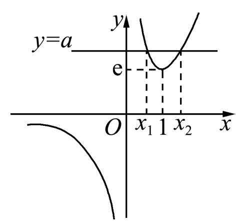
9.BCD 【解析】对于 A,在一个 2×2 列联表中,由计算得 χ^2 的值,χ^2 的值越大,两个变量有关的把握越大,故 A 错误;对于 B,$f(x)=P(x\leqslant\xi\leqslant x+2)$ 为偶函数,则 $f(-x)=f(x)$,即 $P(-x\leqslant\xi\leqslant-x+2)=P(x\leqslant\xi\leqslant x+2)$,故可得 $\mu=\frac{-x+x+2}{2}=1$,故 B 正确;对于 C,$7\neq1.2\times5+2$,所以样本点的中心不可能为 $(5,7)$,C 正确;对于 D,具有线性相关关系的两个变量 x,y 的相关系数为 r,则 $|r|$ 越接近于 1,x 和 y 之间的线性相关程度越强,D 正确.故选 BCD.

10.BD 【解析】$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,因为 $f(0)=\frac{1}{2}$,$f'(0)<0$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$,A 错误;$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)$,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\omega x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\omega\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$,因为 $f(x)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,所以 $\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{13\pi}{6}$,解得 $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$,又 $\omega\in\mathbf{N}^*$,$\omega=1$,B 正确;$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,所以直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 不是 $f(x)$ 图象的对称轴,C 不正确;令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{5\pi}{6}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得

$2k\pi-\frac{4\pi}{3}<x<2k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$，得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 上单调递增，D 正确.故选 BD.



11.ACD 【解析】连接 BN 并延长与 CC_1 交于 E，$BB_1\parallel CE$，$\triangle BB_1N$ 与 $\triangle ECN$ 相似，又 $A_1M=CN$，$A_1B=CB_1$，可得 $\frac{CN}{B_1N}=\frac{NE}{BN}=\frac{A_1M}{BM}$，所以，$MN\parallel A_1E$，$MN\not\subset$ 平面 A_1ACC_1，$A_1E\subset$ 平面 A_1ACC_1，故 $MN\parallel$ 平面 A_1ACC_1，A 正确；当 E 与 C_1 重合时，即当 M，N 分别为线段 A_1B，B_1C 上的中点时，$MN\perp$ 平面 BB_1D_1D，B 错误；直线 MN 与平面 A_1ADD_1 所成角，即直线 A_1E 与平面 A_1ADD_1 所成角，设为 θ，则 $\sin\theta=\frac{1}{A_1E}$，$A_1E$ 最小时，θ 最大，显然 $A_1E_{最小}=A_1C_1=\sqrt{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 θ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$，D 正确；由题易知，$BM=B_1N$，又直线 A_1B 和直线 B_1C 与平面 BB_1D_1D 所成的角相等，故点 M，N 到平面 BB_1D_1D 的距离相等，C 正确.故选 ACD.

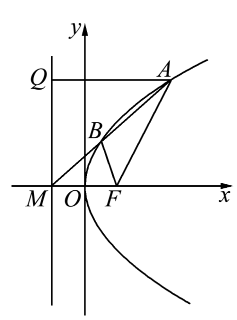


12.BD 【解析】$f'(x)=2e^x-2ax$，则 $f'(x)=0$ 即 $e^x-ax=0$，显然 $x\neq0$，若方程有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，即方程 $a=\frac{e^x}{x}$ 有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，即 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点，且横坐标分别为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，又 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，所以 $a>g(1)=e$，A 错误；当 $a>e$ 时，$g(x)$ 的图象如图所示，易知 $0<x_1<1<x_2$，B 正确；若 $x_2=2x_1$，则 $a=\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}=\frac{e^{2x_1}}{2x_1}$，得 $x_1=\ln 2$，故 $a=\frac{e^{\ln 2}}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$，C 错误；因为 $\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，所以 $x_1e^{x_2}=x_2e^{x_1}$，又 $0<x_1<1$，所以 $e^{x_1}>1$，$x_2>1$，所以 $x_2e^{x_1}>1$，故 $x_1e^{x_2}>1$，所以 $\ln x_1+x_2>0$，D 正确.故选 BD.

13.$\frac{2\pi}{3}$ 【解析】$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=3$，即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，又 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，所以 $1+1-2\times1\times1\times\cos\theta=3$，所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

14.$2x-y+2\ln 2-1=0$ 【解析】由题 $f(x)$ 为奇函数，令 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=e^{-x}-1=-f(x)$，所以，当 $x<0$ 时，$f(x)=1-e^{-x}$，此时 $f'(x)=e^{-x}$，因为 $\ln\frac{1}{2}<0$，所以 $f'\left(\ln\frac{1}{2}\right)=e^{-\ln\frac{1}{2}}=2$，又 $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-1$，所以 $f(x)$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处的切线方程为 $y+1=2\left(x-\ln\frac{1}{2}\right)$，化简得 $2x-y+2\ln 2-1=0$.

15.$\frac{2\,023}{4\,050}$ 【解析】设 $a_n=f(n)$，$a_1=f(1)=2f(0)=2$，则 $a_{n+1}=2a_n-n$，即 $a_{n+1}-(n+2)=2[a_n-(n+1)]$，又 $a_1=2$，所以 $a_{n+1}-(n+2)=2[a_n-(n+1)]=0$，所以 $a_n=n+1$.故 $b_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，所以 $S_{2\,023}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,024}-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,023}{4\,050}$.



16.0 【解析】设直线 l 过抛物线的准线与 x 轴的交点为 M，如图，过点 A 作准线的垂线，垂足为 Q，由直线 l 的斜率为 $\frac{5}{12}$，易得 $\sin\angle AMF=\sin\angle MAQ=\frac{5}{13}$，故 $\cos\angle MAQ=\frac{12}{13}=\frac{|AQ|}{|AM|}$，由抛物线的性质可得 $|AQ|=|AF|$，所以 $\frac{|AF|}{|AM|}=\frac{12}{13}$，在 $\triangle AFM$ 中，由正弦定理可得：$\frac{|AM|}{\sin\angle AFM}=\frac{|AF|}{\sin\angle AMF}$，所以 $\sin\angle AFM=\frac{|AM|}{|AF|}\cdot\sin\angle AMF=\frac{13}{12}\cdot\frac{5}{13}=\frac{5}{12}$，同理可得 $\sin\angle BFM=\frac{5}{12}$，故 $\angle AFM+\angle BFM=\pi$，所以 $k_1+k_2=0$.

17.(1)**解**：解法一：由题，$a_1+a_2=1$，①$2a_2=\left(1+\frac{1}{1}\right)a_1$，即 $a_1=a_2$，②

由①②得 $a_1=a_2=\frac{1}{2}$，

由 $2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}$，…………………………………………………… 2 分

所以 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times1\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\frac{n}{n-1}=\frac{n}{2^n}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2^n}$. ………………………………………………………………………… 5 分

解法二：(1)由题，$a_1+a_2=1$①，$2a_2=\left(1+\frac{1}{a}\right)a_1$，即 $a_1=a_2$②，

由①②得 $a_1=a_2=\frac{1}{2}$，…………………………………………………………………………………… 2 分

由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n$，

得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n}$，

所以数列$\left(\frac{a_n}{n}\right)$是以$\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，$\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2^n}$，

所以数列的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2^n}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)**证明**：由(1)知 $S_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}$，

所以$\frac{1}{2}S_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{2^4}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n+1}}$， ………………………………………………… 7 分

两式作差得：$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，

所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，………………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{n+2}{2^n}>0$，

所以 $S_n<2$. …………………………………………………………………………………………………… 10 分

18.**解**：(1)随机变量 X 的所有可能取值为 0，2，5，7.

则 $P(X=0)=\frac{C_4^2-C_2^2}{C_4^2}\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{5}{12}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2-C_2^2}{C_4^2}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{5}{12}$，

$P(X=5)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{12}$，

$P(X=7)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{12}$， ………………………………………………………………… 4 分

所以 X 的分布列为：

X	0	2	5	7
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

…… 5 分

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+5\times\frac{1}{12}+7\times\frac{1}{12}=\frac{11}{6}$. ………………………………………………… 6 分

(2)不再选取，理由如下：……………………………………………………………………………………… 7 分

如果小茗同学只选择能判断符合题目要求的那个选项为解答结果，则他本题得分为 2 分，

若他再随机选取 1 个，则他本题的得分 Y 可能为：0 或 2，

$P(X=0)=\frac{1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1}{C_3^1}=\frac{2}{3}$，$E(Y)=\frac{1}{3}\times0+\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{3}$，

因为 $E(Y)<2$,所以不再随机选取一个选项作为答题结果. …………………………………………………………………… 9 分

若他再随机选取 2 个,则他本题的得分 Y 可能为:0 或 5,

$P(X=0)=\dfrac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}=\dfrac{2}{3}$,$P(X=5)=\dfrac{C_2^2}{C_3^2}=\dfrac{1}{3}$,$E(Y)=\dfrac{2}{3}\times 0+\dfrac{1}{3}\times 5=\dfrac{5}{3}$,

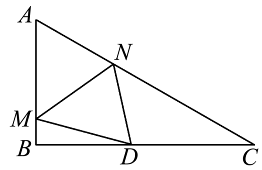
因为 $E(Y)<2$,所以不再随机选取 2 个选项作为答题结果. …………………………………………………………… 11 分

综上,除了能判断的正确选项外,不再随机选取 1 个或 2 个选项作为答题结果. ………………………………… 12 分

19.**解**:(1)由题,$B-C=A$,即 $B=A+C$,又 $A+B+C=\pi$,得 $B=\dfrac{\pi}{2}$, ……………………………………………… 1 分

因为 $AC=2AB$,即 $\sin C=\dfrac{1}{2}$,

因为 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,故 $C=\dfrac{\pi}{6}$,所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$,如图.



因为点 A 与点 D 关于 MN 对称,所以 $\angle AMN=\angle DMN=\theta$,

且 $AM=MD$,所以 $\angle BMD=\pi-2\theta$,

设 $AM=MD=x(0<x<1)$,则 $MB=1-x$,

$AM=MD=\dfrac{MB}{\cos\angle BMD}=\dfrac{1-x}{\cos(\pi-2\theta)}$,

即 $x=\dfrac{1-x}{\cos(\pi-2\theta)}$, ……………………………………………………………………………………………… 3 分

整理得 $1-\cos 2\theta=\dfrac{1}{x}$,因为 $0<x<1$,所以 $1-\cos 2\theta>1$,即 $\cos 2\theta<0$,又 $0<2\theta\leqslant\pi$,

所以 $\dfrac{\pi}{2}<2\theta\leqslant\pi$,$\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

所以 θ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)在 $\triangle AMN$ 中,$\angle ANM=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$,

由正弦定理得 $\dfrac{AN}{\sin\theta}=\dfrac{AM}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$①, ………………………………………………………………… 7 分

在 Rt$\triangle MBD$ 中,$\cos(\pi-2\theta)=\dfrac{1-AM}{AM}$,得 $AM=\dfrac{1}{2\sin^2\theta}$②, ……………………………………………… 8 分

由①②得 $AN=\dfrac{1}{2\sin\theta\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$,

令 $t=2\sin\theta\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)=\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}+\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$, ……………………… 10 分

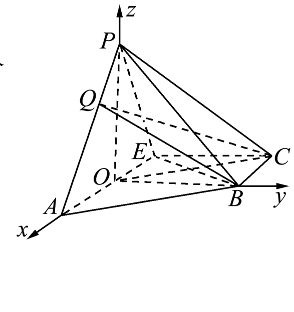
由(1)知 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\dfrac{\pi}{3}<2\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$,

所以当 $2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时,t 取得最大值 $\dfrac{3}{2}$,即 AN 取得最小值 $\dfrac{2}{3}$,

此时 $MN=AN$,故 MN 的长度为 $\dfrac{2}{3}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

20.(1)**证明**:因为 $CE\perp AD$,所以 $CE\perp AE$,$CE\perp PE$,又 $PE\cap AE=E$,PE、$AE\subset$平面 PAE,

所以 $CE\perp$平面 PAE,$CE\subset$平面 $ABCE$,所以平面 $ABCE\perp$平面 PAE. ………………………… 1 分



在梯形 $ABCD$ 中,$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=2$,所以 $AE=2$,

所以在四棱锥 $P-ABCE$ 中,$PE=AE=2$.

因为$\angle PEA=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle PAE$为正三角形.

取AE中点O，连接PO,OB,OC，易得$PO\perp AE,OB\perp AE$，

由面面垂直的性质可得$PO\perp$平面$ABCE$，

所以$PO\perp BE$. …… 3分

又$BC=CE=OE=1,CE\perp AE,CE\perp BC$，所以四边形$OBCE$为正方形，所以$BE\perp OC$，

又$OC\cap PO=O$，OC、$PO\subset$平面POC，

所以$BE\perp$平面POC，……………………………………………………………………………………………… 4分

因为$PC\subset$平面POC，

所以$BE\perp PC$. …… 5分

(2)**解**：由(1)知OA,OB,OP两两垂直，以O为坐标原点，以OA,OB,OP所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系，则：$A(1,0,0),B(0,1,0),C(-1,1,0),P(0,0,\sqrt{3})$，由$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}$得$Q(1-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，……………………… 6分

则$\overrightarrow{BQ}=(1-\lambda,-1,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，设平面$QBC$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

故$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}(1-\lambda)x-y+\sqrt{3}\lambda z=0,\\ -x=0,\end{cases}$令$z=1$，得$x=0,y=\sqrt{3}\lambda$，

所以$\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3}\lambda,1)$，…………………………………………………………………………………… 8分

易知平面ABC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，…………………………………………………………………… 9分

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，………………………………………………………………… 10分

解得$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{3}$(舍).

所以实数λ的值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………………………………………………… 12分

21.**解**：(1)设椭圆的焦距为$2c(c>0)$，则$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，①

将$x=-c$代入椭圆方程得：$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以$\frac{2b^2}{a}=3$，② …………………………………… 2分

又$a^2=b^2+c^2$，③

综合①②③解得：$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，

所以椭圆M的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………………… 4分

(2)存在. …… 5分

设$P(m,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线$l:x=ny-1$，

联立方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=ny-1,\end{cases}$得$(3n^2+4)y^2-6ny-9=0$，

所以$y_1+y_2=\frac{6n}{3n^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3n^2+4}$，……………………………………………………………………… 7分

$\overrightarrow{PA}=(x_1-m,y_1),\overrightarrow{PB}=(x_2-m,y_2)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$

$=(ny_1-1)(ny_2-1)-m(ny_1+ny_2-2)+m^2+y_1y_2$

$=(n^2+1)y_1y_2-(mn+n)(y_1+y_2)+m^2+2m+1$ ……………………………………………………………… 9分

$=\frac{-9(n^2+1)}{3n^2+4}-\frac{6n(mn+n)}{3n^2+4}+m^2+2m+1=\frac{3m^2n^2+4m^2-12n^2+8m-5}{3n^2+4}$

$=\dfrac{m^2(3n^2+4)-4(3n^2+4)+8m+11}{3n^2+4}=m^2-4+\dfrac{8m+11}{3n^2+4}$, ……………………………………………………………… 10 分

当 $8m+11=0$,即 $m=-\dfrac{11}{8}$时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值$-\dfrac{135}{64}$,

所以存在点 $P\left(-\dfrac{11}{8},0\right)$,使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值. ……………………………………………………………… 12 分

22.(1)**解**:$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$,

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增;

且 $f(0)=0$,所以 $f(x)$存在唯一零点; ……………………………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{1}{a}-1>-1$,

当 $x\in\left(-1,\dfrac{1}{a}-1\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x\in\left(\dfrac{1}{a}-1,+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=a-1-\ln a$,且 $x\to+\infty$,$f(x)\to-\infty$;$x\to-1$,$f(x)\to-\infty$. …………………… 4 分

若 $f(x)$存在唯一零点,则 $a-1-\ln a=0$,

设 $h(a)=a-1-\ln a$,则 $h'(a)=1-\dfrac{1}{a}$,

当 $a\in(0,1)$时,$h'(a)<0$,$h(a)$单调递减;当 $a\in(1,+\infty)$时,$h'(a)>0$,$h(a)$单调递增,

所以 $h(a)\geqslant h(1)=0$,故当 $a-1-\ln a=0$ 时,$a=1$,

所以 $f(x)$存在唯一零点时,实数 a 的取值范围为 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$. ……………………………………………… 6 分

(2)**证明**:由(1)知:当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln(x+1)-x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $f(x)<f(0)=0$,即 $\ln(x+1)<x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

令 $x=3^{-n}$,$n=1,2,3,\cdots$,则 $\ln(1+3^{-n})<3^{-n}$, ……………………………………………………………… 8 分

所以 $\ln[(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})]=\ln(1+3^{-1})+\ln(1+3^{-2})+\ln(1+3^{-3})+\cdots+\ln(1+3^{-n})$

$<3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\cdots+3^{-n}=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}<\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………… 10 分

所以 $\ln[(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})]<\dfrac{1}{2}=\ln\sqrt{e}$,

所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$(1+3^{-1})(1+3^{-2})(1+3^{-3})\cdots(1+3^{-n})<\sqrt{e}$. ……………………………………………… 12 分