哈师大附中2023年高三第四次模拟考试

数　　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^3\}$，$B=\{(x,y)\mid y=4x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,0,2\}$　　B. $\{(0,0)\}$

C. $\{(0,0),(2,8)\}$　　D. $\{(-2,-8),(0,0),(2,8)\}$

2. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $\dfrac{z}{1+i}=2+i$，则

A. z 的实部为3　　B. z 的虚部为1

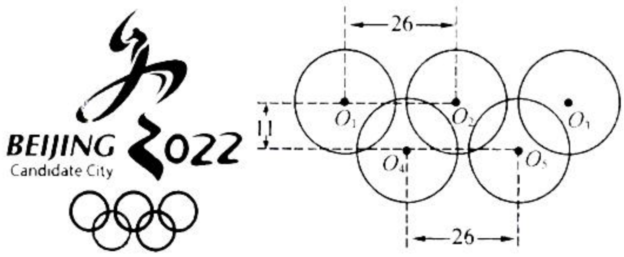
C. $z\bar{z}=10$　　D. z 在复平面对应的点在第二象限

3. 第三十二届哈尔滨国际经济贸易洽谈会（简称“哈洽会”）将于2023年6月15日至19日在哈尔滨国际会展体育中心举办，搭建展示和对接的平台，进一步激活发展潜能，推动“一带一路”建设. 本届“哈洽会”线下展览总面积共计6万平方米，拟设中俄地方经贸合作主题展区、港澳台及国际展区、省区市合作展区、产业合作展区、龙江振兴展区、机械设备展区六大展区，展区布局如图所示，则产业合作展区与龙江振兴展区相邻的概率为

A	B	C	D	E	F

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

4. 下图是北京2022年冬奥会会徽的图案，奥运五环的大小和间距如图所示. 若圆半径均为12，相邻圆圆心水平距离为26，两排圆圆心垂直距离为11. 设五个圆的圆心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4、O_5，则 $\overrightarrow{O_4O_1}\cdot(\overrightarrow{O_4O_5}+\overrightarrow{O_4O_2})$ 的值为

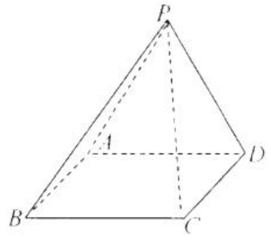


A. -507　　B. -386　　C. -338　　D. -242

5. 圆 $O:x^2+y^2=4$ 与直线 $l:x+(\lambda-1)y-\lambda=0$ 交于 M、N，当 $|MN|$ 最小时，λ 的值为

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

6. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$AB=2$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，则 PC 与 BD 所成角的余弦值为



A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 已知锐角 α,β 满足 $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin2\beta}{1-\cos2\beta}$，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为

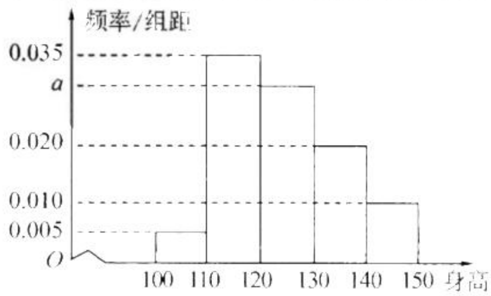
A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. -1　　D. $-\sqrt{3}$

8. 函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 R，$g(x)$ 的导函数 $g'(x)$ 定义域为 R，若 $f(x)+g(4-x)=4$，$f(x)-g(8-x)=-8$，$g'(x)+g'(8-x)=0$，$g(4)=8$，则 $\sum\limits_{k=1}^{14}f(2k)$ 的值为

A. -20　　B. -22　　C. -24　　D. -26

二、选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 从某小学随机抽取 100 名同学，将他们的身高（单位：厘米）数据绘制成频率分布直方图（如图）．则下列结论正确的是



A. $a=0.030$

B. 身高落在 $[120,140)$ 内的人数为 50 人

C. 若从身高在 $[110,120)$，$[120,130)$，$[130,140)$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法抽取 17 人，则身高在 $[130,140)$ 的学生选取的人数为 4 人

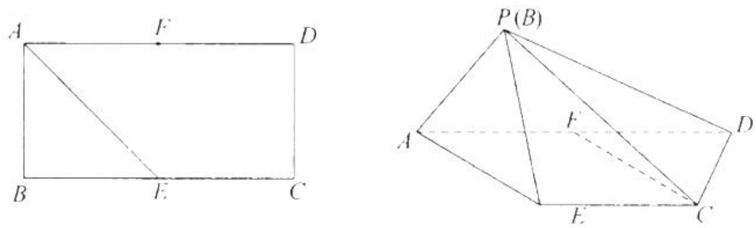
D. 若将学生身高由高到低排序，前 15% 的学生身高为 A 级，则身高为 142 厘米的学生身高肯定不是 A 级

10. 已知曲线 $C:mx^2+(1-m)y^2=1$ 为焦点在 y 轴上的椭圆，则

A. $\frac{1}{2}<m<1$　　B. C 的离心率为 $\sqrt{\frac{2m}{1-m}}$

C. C 的短轴长的取值范围是 $(2,2\sqrt{2})$　　D. m 的值越小，C 的焦距越大

11. 如图，矩形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 BC、AD 的中点，且 $BC=2AB=2$，现将 $\triangle ABE$ 沿 AE 向上翻折，使 B 点移到 P 点，则在翻折过程中，下列结论正确的是



A. 存在点 P，使得 $PE\parallel CF$

B. 存在点 P，使得 $PE\perp ED$

C. 三棱锥 $P-AED$ 的体积最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

D. 当三棱锥 $P-AED$ 的体积达到最大值时，三棱锥 $P-AED$ 外接球表面积为 4π

12. 已知 $a>0,b>0,a+b=2ab-\dfrac{3}{2}$，则

A. $a>\dfrac{3}{4}$　　B. $a+b\geqslant 3$　　C. $ab\geqslant\dfrac{9}{4}$　　D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{4}{3}$

第Ⅱ卷(非选择题共90分)

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)

13. $(1+2x)\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中 x^2 次系数是________.

14. 已知直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，且 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$ 于点 D，点 D 的坐标为 $(2,1)$，则 $p=$________.

15. 有理数都可以表示成 $\dfrac{m}{n}$（$m,n\in Z$，且 $n\neq 0$，m 与 n 互质）的形式，进而有理数集可表示为 $Q=\left\{\dfrac{m}{n}\,\middle|\, m,n\in Z\text{，且 }n\neq 0\text{，}m\text{ 与 }n\text{ 互质}\right\}$. 任何有理数，都可以化为有限小数或无限循环小数. 反之，任一有限小数或无限循环小数也可以化为 $\dfrac{m}{n}$ 的形式，从而是有理数；那么无限循环小数 $1.\dot{2}$ 表示成 $\dfrac{m}{n}$ 的形式为________.

16. 任取一个正整数 m，若 m 是奇数，就将该数乘3再加上1；若 m 是偶数，就将该数除以2. 反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 $1\to4\to2\to1$. 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”等）. 如取正整数 $m=6$，根据上述运算法则得出 $6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$，共需经过8个步骤第一次变成1（简称为8步“雹程”）. 当 $m=17$ 时，需要________步雹程；若 m 经过8步“雹程”第一次变成1，则 m 所有可能的取值集合 $M=$________.

四、解答题(本大题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

17.（本小题满分10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{3}{5}$，且满足 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$.

(1) 求证：数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列；

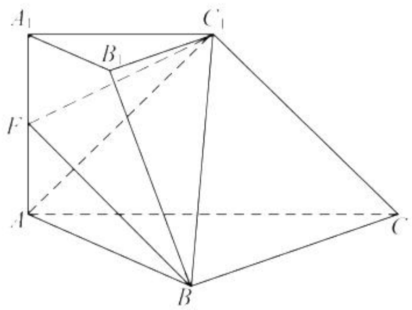
(2) 若 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<100$，求满足条件的最大整数 n.

18.（本小题满分12分）

三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=90^\circ$，且 $AB=BC=AA_1=2$，$B_1C_1=1$，F 是 AA_1 的中点.

(1) 求三角形 ABC 重心 G 到直线 B_1C_1 的距离；

(2) 求二面角 B_1-BC_1-F 的余弦值.



19.(本小题满分12分)

将函数$f(x)=\sin x$的图象先向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再将所得函数图象上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}(\omega>0)$倍(纵坐标不变),得到函数$y=g(x)$的图象.

(1)若$\omega=2$,求函数$y=g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值;

(2)若函数$y=g(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上没有零点,求$\omega$的取值范围.

20.(本小题满分12分)

生产某种特殊零件的废品率为$p(0<p<1)$,在合格品中,优等品的概率为0.5,若20个此特殊零件中恰有4件废品的概率为$f(p)$,设$f(p)$的最大值点为p_0.

(1)求p_0;

(2)若工厂生产该零件的废品率为p_0.

(ⅰ)从生产的产品中随机抽取n个零件,设其中优等品的个数为X,记$P_k=P(X=k)$,$k=0,1,\cdots,n$,已知$X=5$时优等品概率P_k最大,求n的最小值;

(ⅱ)已知每个零件的生产成本为80元,合格品每件售价150元,同时对不合格零件进行修复,修复为合格品后正常售卖,若仍不合格则以每件10元的价格出售,若每个不合格零件修复为合格零件的概率为0.5,工厂希望一个零件至少获利50元,试求一个零件的修复费用最高为多少元.

21.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=\frac{ax}{e^x}$和$g(x)=\frac{\ln x}{ax}$有相同的最大值.

(1)求a;

(2)证明:存在直线$y=b$,其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点,并且从左到右的三个交点的横坐标成等比数列.

22.(本小题满分12分)

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$,焦距为10,$A_1$,$A_2$为其左右顶点.

(1)求C的方程;

(2)设点P是直线$l:x=2$上的任意一点,直线PA_1、PA_2分别交双曲线C于点M、N,$A_2Q\perp MN$,垂足为Q,求证:存在定点R,使得$|QR|$是定值.

哈师大附中 2023 年高三第四次模拟考试
数 学 答 案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	B	A	C	D

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AC	BCD	BCD

三、填空题

13、288　　14、$\frac{5}{4}$　　15、$\frac{11}{9}$　　16、12、$\{4,5,6,32,40,42,256\}$

四、解答题

17.（10 分）

解：（1）$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}(\frac{1}{a_n}-1)$

所以，$\{a_n\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

（2）由（1）可得 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n}+1$

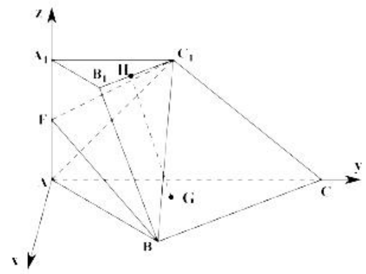
又 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\frac{1}{a_n}=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\frac{1}{3^n})+n=n+1-\frac{1}{3^n}<100$

设 $f(x)=x+1-\frac{1}{3^x}$，则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增

所以，满足条件的最大整数 n 的值为 99 .

18.（12 分）

解：（1）建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$，则



$B(\sqrt{2},\sqrt{2},0),C(0,2\sqrt{2},0),C_1(0,\sqrt{2},2),F(0,0,1),G(\frac{\sqrt{2}}{3},\sqrt{2},0),B_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},2)$

过点 G 作 $GH\perp B_1C_1$，设 $\overrightarrow{B_1H}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，则 $H(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,2)$

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0$ 得，$\lambda=\frac{2}{3}$，$|GH|=\frac{\sqrt{37}}{3}$.

（2）$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{2},0,2)$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{B_1B}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$

设平面 BB_1C_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1B}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$$

设平面 BFC_1 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$$

所以，$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2\sqrt{70}}{35}$

所以，二面角 B_1-BC_1-F 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{70}}{35}$.

19.（12 分）

解：（1）函数 $f(x)=\sin x$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$，得 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 函数图象所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，得到 $g(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$

当 $\omega=2$ 时，$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

$-\frac{3}{4}\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$，$g(x)$ 在 $[-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{2}]$ 递减，$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$ 递增，则 $-1\le\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）令 $g(x)=0$，则 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}$

$g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 无零点，则 $\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\le\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\ge\frac{\pi}{2}$

所以，$\omega\ge 4k+1$ 或 $\omega\le 2k+\frac{1}{2}$

当 $k=0,k=1$ 时，ω 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,\frac{5}{2}]$.

20.（12 分）

解：（1）由题意得：

$f(p)=C_{20}^{4}p^{4}(1-p)^{16}(0<p<1)$

$f'(p)=4C_{20}^{4}p^{3}(1-p)^{16}-16C_{20}^{4}p^{4}(1-p)^{15}=4C_{20}^{4}p^{3}(1-p)^{15}(1-5p)$

所以，$f(p)$ 在 $(0,0.2)$ 递增，在 $(0.2,1)$ 递减

当 $p_0=0.2$ 时，$f(p)$ 取最大值.

（2）设优等品的个数为 X，则 $X-B(n,0.4)$

$p_k=p(X=k)=C_n^k0.4^k0.6^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$，$p(x=k)$ 先增后减

若 $X=5$ 时，p_k 有最大值，则

$\begin{cases}p_5\ge p_4\\p_5\ge p_6\end{cases}\Rightarrow 11.5\le n\le 14$，所以 n 的最小值为 12.

（3）设工厂生产一个零件获利 x 元，零件的修复费用为 a 元

则 X 的可能取值为：70，$70-a$，$-70-a$

$p(X=70)=0.8$　$p(X=70-a)=0.2\times0.5=0.1$　$p(X=-70-a)=0.2\times0.5=0.1$

$0.8\times70+(70-a)\times0.1+(-70-a)\times0.1\ge 50$

$a\le 30$

所以，一个零件最要修复费用为 30 元.

21.（12 分）

解：

（1）依题意 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{3}{4}\\2c=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow C:\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

（2）设 $Q(x_0,y_0)$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$．直线 MN：$y-y_0=-\frac{x_0-4}{y_0}(x-x_0)$，即 MN：$y=-\frac{x_0-4}{y_0}x+\frac{(x_0-4)x_0+y_0^2}{y_0}$

（记 $k=-\frac{x_0-4}{y_0}$，$m=\frac{(x_0-4)x_0+y_0^2}{y_0}$）代入 $9x^2-16y^2=9\times16$ 中得

$(9-16k^2)x^2-32kmx-16(m^2+9)=0$

所以，$x_1+x_2=\frac{32km}{9-16k^2}$，$x_1x_2=-\frac{16(m^2+9)}{9-16k^2}$

又因为直线 A_1M：$y=\frac{y_1}{x_1+4}(x+4)$、直线 A_2M：$y=\frac{y_2}{x_2-4}(x-4)$ 联立得

$-\frac{1}{3}=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\frac{x_2-4}{y_2}=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\left(\frac{16}{9}\right)\frac{y_2}{x_2+4}=\frac{16}{9}\cdot\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1+4)(x_2+4)}$

$\Longrightarrow(16k^2+3)x_1x_2+4(4km+3)(x_1+x_2)+16(m^2+3)=0$

$\Longrightarrow(m^2+9)(16k^2+3)-8km(4km+3)+(m^2+3)(16k^2-9)=0$

$\Longrightarrow-24km-6m^2+16\times12k^2=0$

即 $32k^2-4km-m^2=0\Longrightarrow m=-8k$ 或 $m=4k$（舍）

所以 $\frac{x_0-4}{y_0}\cdot8=\frac{(x_0-4)x_0+y_0^2}{y_0}\Longrightarrow(x_0-6)^2+y_0^2=4$

所以，Q 点轨迹为，以 $(6,0)$ 为圆心，2 为半径的圆上，所以 $R(6,0)$，$|QR|=2$

22.（12 分）

解析：（1）$f'(x)=a\cdot\frac{1-x}{e^x}$

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，所以 $f_{max}(x)=f(1)=\frac{a}{e}$

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，在 $(-\infty,1)$ 递减，所以无最大值，不合题意

$g'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e)$ 递增，在 $(e,+\infty)$ 递减，所以 $g_{max}(x)=g(e)=\frac{1}{ae}$

当 $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e)$ 递减，在 $(e,+\infty)$ 递增，所以无最大值，不合题意

所以 $\frac{a}{e}=\frac{1}{ae}(a>0)\Longrightarrow a=1$

（2）由（1）知 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，$g(x)=f(\ln x)=\frac{\ln x}{x}$，由于 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$x>1$ 时，$g(x)>0$，因此只有 $0<b<\frac{1}{e}$ 才可能满足题意，记 $h(x)=\frac{x}{e^x}-b$，且 $0<b<\frac{1}{e}$，由（1）得 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，且 $h(1)=\frac{1}{e}-b>0,h(0)=-b<0$，所以存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $h(x_1)=0$，设 $\varphi(x)=e^x-x^2$，则 $\varphi'(x)=e^x-2x$，设 $m(x)=\varphi'(x)$，则 $m'(x)=e^x-2$，$0<x<\ln2$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 递减，$x>\ln2$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 递增，所以 $m(x)_{min}=m(\ln2)=2-2\ln2>0$，所以 $\varphi'(x)\ge\varphi'(\ln2)>0$，$\varphi(x)$ 是增函数，$x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=1>0$，$\varphi(\frac{1}{b})=e^{\frac{1}{b}}-\frac{1}{b^2}>0$，$\frac{\frac{1}{b}}{e^{\frac{1}{b}}}<b$ 又 $h\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\frac{1}{b}}{e^{\frac{1}{b}}}-b<0$，所以存在 $x_0\in\left(1,\frac{1}{b}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即此时 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 有两个交点，其中一个交点在 $(0,1)$ 内，另一个交点在 $(1,+\infty)$ 内，同理 $y=b$ 与 $y=f(\ln x)=g(x)$ 也有两个交点，其中一个交点在 $(0,e)$ 内，

另一个交点在$(e,+\infty)$内，若$y=b$与$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，则其中一个交点为两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$的公共点，记其横坐标为x_2，令$f(x_2)=g(x_2)=f(\ln x_2)$，则$x_2\in(1,e),\ln x_2\in(0,1)$，记$y=b$与$y=f(x),y=g(x)$的三个交点的横坐标从左到右依次为$x_3,x_2,x_4$，且满足$x_3<1<x_2<e<x_4,f(x_3)=f(x_2)=g(x_2)=g(x_4)$，且$\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，即$x_2^2=e^{x_2}\ln x_2$，又$f(x_3)=f(\ln x_2),f(x_2)=f(\ln x_4)$，且$x_3,\ln x_2\in(0,1),x_2,\ln x_4\in(1,e)$，且$f(x)$在$(0,1)$和$(1,e)$上分别单调，所以$x_3=\ln x_2,x_2=\ln x_4$，即$x_4=e^{x_2}$，所以$x_2^2=x_3x_4$，$x_2$为$x_3,x_4$的等比中项，所以从左到右的三个交点的横坐标$x_3,x_2,x_4$成等比数列.