数学参考答案、提示及评分细则

1. A 易知 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$，因为 $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$，所以 $A=(-1,4)$，$|x|\geqslant 2$，集合 $B=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2\}$，则 $\complement_U B=\{x|-2<x<2\}$，所以 $(\complement_U B)\cup A=\{x|-2<x<4\}$.

2. C 因为 $|z_2|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，所以 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=3\sqrt{5}$.

3. A 因为 $|PO|=|PQ|=|PF|$，所以 $\frac{p}{2}=1\times 2$，即 $p=4$，$x^2=8y$，$x_0^2=8\times 1$，又 $\because x_0>0$，$\therefore x_0=2\sqrt{2}$.

4. B 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{3}$，

   易解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\tan\theta=\sqrt{2}$.

5. C 显然众数是 370，故 A 正确，$0.01\times 20\times 350+0.02\times 20\times 370+0.0125\times 20\times 390+0.0075\times 20\times 410=377$，故 B 正确；设 70% 分位数为 m，则 $0.01\times 20+0.02\times 20+(m-380)\times 0.0125=0.7$，得 $m=388$，故 C 错误，$0.0075\times 20\times 200=30$，故 D 正确.

6. B 易知该石料底面内切圆半径为 $\sqrt{3}$，所以打磨而成的石球与该石料的各个侧面均相切，

   因为最多打磨成四个，所以该石料的高度最小值为 $8\sqrt{3}$，

   所以该石料的体积 $V\geqslant\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times 8\sqrt{3}=216$，

   又四个石球的总体积 $V=4\times\frac{4}{3}\pi\times\sqrt{3}^3=16\sqrt{3}\pi$，

   所以至少需要打磨掉的体积为 $216-16\sqrt{3}\pi$.

7. D 由题意可知，当 $x>0$ 时，$f(x)=4x^4-6tx^3+(2t^2+6)x^2-3tx+1\geqslant 0$ 恒成立，且存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)=0$，同除 x^2，可得 $4x^2+\frac{1}{x^2}-6tx-\frac{3t}{x}+(2t^2+6)\geqslant 0$，整理得 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^2-3t\left(2x+\frac{1}{x}\right)+2t^2+2\geqslant 0$，

   因为 $x>0$，所以 $2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，

   当 $\frac{3t}{2}\leqslant 2\sqrt{2}$，即 $t\leqslant\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时，$f(x)_{\min}=8-6\sqrt{2}t+2t^2+2>0$，不符题意；

   当 $\frac{3t}{2}>2\sqrt{2}$，即 $t>\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时，由 $\Delta=9t^2-4(2t^2+2)=0$，解得 $t=2\sqrt{2}$.

   综上，$t=2\sqrt{2}$.

8. B 易知 $x_2+x_3=x_1+x_4=0$，所以 $x_4=3x_3$，且 $f(x_2)+f(x_3)=0$，

   所以数列 $\{f(x_n)\}$ 的公比 $q=-1$，所以 $f(x_3)+f(3x_3)=0$，

   即方程 $f(x)+f(3x)=e^{3x}+e^x-4ax+2e^3=0$ 有正实数解，

   即 $4a=\frac{e^{3x}+e^x+2e^3}{x}$，设 $g(x)=\frac{e^{3x}+e^x+2e^3}{x}(x>0)$，

   则 $g'(x)=\frac{(3x-1)e^{3x}+(x-1)e^x-2e^3}{x^2}$，设 $h(x)=(3x-1)e^{3x}+(x-1)e^x-2e^3$，

   则 $h'(x)=9xe^{3x}+xe^x>0$，即 $h(x)$ 单调递增，且 $h(1)=g'(1)=0$，

   易知 $g(x)_{\min}=g(1)=3e^3+e$，所以 $a_{\min}=\frac{3}{4}e^3+\frac{1}{4}e$.

9. BCD $\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，

$\therefore 2x+\varphi=-\frac{2\pi}{3}+\varphi\in\left(-\frac{7\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right)$，$-\frac{2}{3}\pi+\varphi=k\pi$，$\therefore k=-1$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故 A 错误；

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x=\frac{5\pi}{12}$时，$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，故 B 正确；

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$是单调递减，故 C 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right)$内有极值点，故 D 正确. 故选 BCD.

10. AC　因为 $q>0$，所以 $T_6=a_1^6q^{15}>0$，

又 $T_7>T_6>T_8$，所以 $a_7>1>a_7a_8$，所以 $a_7>1>a_8$，即 $0<q<1$，即 A 正确，B 错误；

因为 $a_7>1$，所以 $T_{13}=a_7^{13}>1$，因为 $a_7a_8<1$，所以 $T_{14}=(a_7a_8)^7<1$，即 C 正确，D 错误.

11. BD　展开式各项表达式为 $C_n^r\cdot x^{\frac{r}{3}}\cdot x^{\frac{-n+r}{2}}=C_n^r\cdot x^{\frac{-3n+5r}{6}}$ $(r=0,1,2,\cdots,n)$，

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$C_n^r\cdot x^{\frac{-3n+5r}{6}}=C_n^r\cdot x^{\frac{-6k+5r}{6}}$ $(r=0,1,2,\cdots,n)$，

所以 r 为 6 的倍数，所以 $r=0,6$，即 n 可取 6，8，10；

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，$C_n^r\cdot x^{\frac{-3n+5r}{6}}=C_n^r\cdot x^{\frac{-6k+5r+3}{6}}$ $(r=0,1,2,\cdots,n)$，

所以 r 为 3 的奇数倍，所以 $r=3,9$，即 n 可取 9，11，13.

即 n 取值集合为$\{6,8,9,10,11,13\}$.

12. ACD　由对称性可知，$|F_1B|=|F_2A|$，所以 $|F_1A|+|F_1B|=|F_1A|+|F_2A|=2a=4\sqrt{2}$，即 A 正确；

设 $B(x,y)$，$A(-x,y)$，则 $x,y>0$，$y=t$，且$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，

所以$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=(-x+2,y)\cdot(x+2,y)=4-x^2+y^2=4-x^2+4-\frac{x^2}{2}=0$，

解得 $y=t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即 B 错误；

易知 $S=xy$，又$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\geqslant 2\frac{xy}{\sqrt{32}}=\frac{xy}{2\sqrt{2}}$，所以 $S=xy\leqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{2}y$ 时，上述等号成立，即 C 正确；

设 $|F_1A|=m$，$|F_2A|=n$，则 $m+n=4\sqrt{2}$，

由余弦定理，可知 $|F_1F_2|^2=16=m^2+n^2-mn=32-3mn$，所以 $mn=\frac{16}{3}$，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}mn\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot y=2y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

代入椭圆，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $S=xy=\frac{8}{3}$，即 D 正确.

13. $\frac{1}{2}$　$\frac{a\cos 18^\circ}{\sqrt{2-a}}=\frac{2\cos 72^\circ\cdot\cos 18^\circ}{\sqrt{2-2\cos 72^\circ}}=\frac{2\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ}{\sqrt{2-2(1-2\sin^2 36^\circ)}}=\frac{\sin 36^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{1}{2}$.

14. $6+4\sqrt{2}$　$\because\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}-2=\frac{\sqrt{ab}-4ab}{2ab}$，$\therefore\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{2ab}$，两边平方得$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2=\frac{1}{4ab}$，

$\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}=\frac{1}{4ab}$，$(a+b)^2=\frac{1}{4}$，$a+b=\frac{1}{2}$，$\therefore 2a+2b=1$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(2a+2b)=6+\frac{2b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 6+4\sqrt{2}$，

当且仅当 $b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$时，上述等号成立.

15. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$　根据题意 FG 平分正方形 $ABCD$ 周长，可得 FG 恒过正方形 $ABCD$ 的中心，设 $ABCD$ 的中心为点 O，由 $FG\perp EC$ 可知，P 点的轨迹是以 OC 为直径的圆，以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴建立直角坐标系，$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(4,4)$，$O(2,2)$，以 OC 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=2$，设 M 为圆心可知坐标为 $(3,3)$，当 $|BP|$ 最小时，B,P,M 三点共线，可知此时直线 BP 的方程为 $y=-3x+12$，则点 A 到直线 BP 的距离为 $\frac{12}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6}{5}\sqrt{10}$.

16. $\left[-\frac{2}{e},0\right)$　设曲线 $y=f(x)$ 的切点为 $\left(x_1,\frac{a}{x_1}\right)$，曲线 $y=g(x)$ 的切点为 $(x_2,2\ln x_2)$，

因为 $f'(x)=-\frac{a}{x^2}$，$g'(x)=\frac{2}{x}$，

所以 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 处的切线方程为 $y=\left(-\frac{a}{x_1^2}\right)(x-x_1)+\frac{a}{x_1}=\left(-\frac{a}{x_1^2}\right)x+\frac{2a}{x_1}$，

同理可得，$y=g(x)$ 在 $x=x_2$ 处的切线方程为 $y=\frac{2}{x_2}x+2\ln x_2-2$，

由题意可知，$\begin{cases}-\frac{a}{x_1^2}=\frac{2}{x_2},\\ \frac{2a}{x_1}=2\ln x_2-2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{a}{x_1^2}=-\frac{2}{x_2},\\ \frac{a}{x_1}=\ln x_2-1,\end{cases}$

因为 $\frac{a}{x_1^2}=-\frac{2}{x_2}<0$，所以 $a<0$，所以 $\frac{a}{x_1}=\ln x_2-1<0$，即 $\ln x_2<1$，

消去 x_1，整理得 $a=-\frac{x_2(\ln x_2-1)^2}{2}$，

设 $\ln x_2=t<1$，$a(t)=-\frac{(t-1)^2e^t}{2}$，则 $a'(t)=-\frac{(t^2-1)e^t}{2}$，

令 $a'(t)=0$，解得 $t=-1$，易知 $a(t)_{\min}=a(-1)=-\frac{2}{e}$，

又 $a(1)=0$，所以 $a\in\left[-\frac{2}{e},0\right)$.

17. 解：(1)因为 $A=\frac{\pi}{3}$，且 $a+b+c=6$，…… 2 分

所以 $a^2=[6-(b+c)]^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$，…… 4 分

展开整理得 $bc+12=4(b+c)$，命题得证，…… 5 分

(2)因为 $bc+12=4(b+c)\geqslant 8\sqrt{bc}$，所以 $(\sqrt{bc})^2-8\sqrt{bc}+12\geqslant 0$，…… 6 分

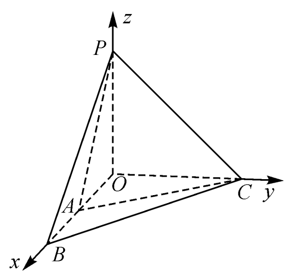
所以 $\sqrt{bc}\leqslant 2$ 或 $\sqrt{bc}\geqslant 6$，即 $bc\leqslant 4$ 或 $bc\geqslant 36$，

又 $bc+12=4(b+c)<24$，所以 $bc<12$，所以 $bc\leqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，…… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，…… 9 分

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$. …… 10 分

18. (1)证明：作 $PO\perp AB$，垂足为 O，连接 CO，



因为 $PO\perp BO$，且 $\angle PBA=45°$，…… 2 分

所以 $\triangle PBO$ 是等腰直角三角形，

又 $PB=2\sqrt{2}$，所以 $OB=OP=2$，

因为 $BC=2\sqrt{2}$，$\angle CBO=45°$，由余弦定理可知 $CO=2$，

所以 $BO^2+CO^2=BC^2$，即 $OB\perp OC$，…… 4 分

又 $OP\cap OC=O$，$OP,OC\subset$ 平面 POC，

所以 $OB\perp$ 平面 POC，

又 $PC\subset$ 平面 POC，所以 $OB\perp PC$，即 $AB\perp PC$；…………………………………… 6 分

(2)解：因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PO\perp AB$，$PO\subset$ 平面 PAB，

所以 $PO\perp$ 平面 ABC，又 $OC\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp OC$，…………………………………… 7 分

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(1,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，…………………………………… 8 分

所以 $\overrightarrow{CA}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{CB}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$，

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=x_1-2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-2y_1+2z_1=0,\end{cases}$ …………………………………… 9 分

取 $x_1=2$，则 $y_1=z_1=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$，

设平面 BPC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_2-2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-2y_2+2z_2=0,\end{cases}$ …………………………………… 10 分

取 $x_2=1$，则 $y_2=z_2=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，…………………………………… 11 分

设二面角 $B-PC-A$ 为 θ，由图可知，θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2+1+1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …………………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意知，X 的所有可能值为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=(1-0.6)\times(1-p)^2=0.4p^2-0.8p+0.4$，…………………………………… 1 分

$P(X=1)=0.6(1-p)^2+2(1-0.6)\times p(1-p)=-0.2p^2-0.4p+0.6$，…………………………………… 2 分

$P(X=2)=(1-0.6)\times p^2+2\times0.6p(1-p)=-0.8p^2+1.2p$，…………………………………… 3 分

$P(X=3)=0.6p^2$.

由此得 X 的分布列如下表：

X	0	1	2	3
P	$0.4p^2-0.8p+0.4$	$-0.2p^2-0.4p+0.6$	$-0.8p^2+1.2p$	$0.6p^2$

…………………………………… 4 分

$E(X)=0\times(0.4p^2-0.8p+0.4)+1\times(-0.2p^2-0.4p+0.6)+2\times(-0.8p^2+1.2p)+3\times0.6p^2=2p+0.6$；

…………………………………… 5 分

(2)根据 $0.6\leqslant p\leqslant0.8$，由(1)知当 $p=0.6$ 时，$E(X)$ 取得最小值，…………………………………… 6 分

①一株 B 种树苗最终成活的概率为 $0.6+(1-0.6)\times80\%\times0.5=0.76$；…………………………………… 7 分

②记 Y 为 n 株 B 种树苗的成活株数，$M(n)$ 为 n 株 B 种树苗的利润，则 $Y\sim B(n,0.76)$. …………………………………… 8 分

$E(Y)=0.76n$，$M(n)=400Y-60(n-Y)=460Y-60n$，…………………………………… 9 分

$E(M(n))=460E(Y)-60n=460\times0.76n-60n=289.6n$，…………………………………… 10 分

要使 $E(M(n))\geqslant300000$，有 $289.6n\geqslant300000$，可得 $n\geqslant1036$，…………………………………… 11 分

所以该农户应至少种植 1036 株 B 种树苗，就可获利不低于 30 万元. …………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $a_{n+2}+a_n=a_2\cdot a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{n+3}+a_{n+1}=a_2\cdot a_{n+2}$，…………………………………… 2 分

两式相减，可得 $a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=a_2(a_{n+2}-a_{n+1})$，…………………………………… 3 分

又 $\because\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列，$\therefore a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=2(a_{n+2}-a_{n+1})$，

则 $a_2(a_{n+2}-a_{n+1})=2(a_{n+2}-a_{n+1})$，又 $\because a_{n+1}>a_n$，$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}\neq0$，$\therefore a_2=2$，…………………………………… 4 分

所以 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，即 $\{a_n\}$ 为等差数列，且公差 $d=1$，…………………………………… 5 分

所以 $S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$；…………………………………… 6 分

(2)设 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_{n+2}+a_n=a_2\cdot a_{n+1}$，所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n-\dfrac{1}{2}a_{n+1}=\left(a_2-\dfrac{5}{2}\right)a_{n+1}$，…………………………………… 7 分

所以$\left(q-\frac{1}{2}\right)(a_{n+1}-2a_n)=\left(a_2-\frac{5}{2}\right)a_{n+1}$,所以$\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2a_n}{a_{n+1}}\right)=a_2-\frac{5}{2}$, …………………… 8 分

因为$\{a_n\}$不是等比数列,所以$\frac{a_n}{a_{n+1}}$不是常数,所以$q=\frac{1}{2}$,$a_2=\frac{5}{2}$, …………………… 9 分

又$a_2-2a_1=\frac{1}{2}$,所以$a_{n+1}-2a_n=\frac{1}{2^n}$,即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2\cdot 4^n}$, …………………… 10 分

由累加法可知,$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$,所以$a_n=\frac{2}{3}\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)$. …………………… 12 分

21. 解:(1)由题意可知,$2c=8$,即$c=4$,所以$a^2+b^2=16$, …………………… 1 分

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$M(-1,y_1)$,$N(-1,y_2)$,

当AB与x轴垂直时,因为$|AB|=|MN|=12$,则$|y_1|=|y_2|=6$, …………………… 2 分

所以$\frac{16}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1$,解得$a=2$,$b=2\sqrt{3}$, …………………… 3 分

即双曲线C的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; …………………… 4 分

(2)由(1)可知,$M(-1,y_1)$,$N(-1,y_2)$,

设直线AB:$x=my-4$,因为直线AB与双曲线左支相交于两点,所以$m\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, …………………… 5 分

与C的方程联立,$\begin{cases}x=my-4,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$消去$x$,整理得$(3m^2-1)y^2-24my+36=0$, …………………… 6 分

所以$y_1+y_2=\frac{24m}{3m^2-1}$,$y_1y_2=\frac{36}{3m^2-1}$,

所以$|PM|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+y_1^2}=\sqrt{y_1^2+12}$,

因为$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{12}=1$,所以$y_1^2+12=3x_1^2$,且$x_1<0$,所以$|PM|=-\sqrt{3}x_1$. …………………… 7 分

同理可得$|PN|=-\sqrt{3}x_2$.

所以$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}x_1+t}+\frac{1}{\sqrt{3}x_2+t}\right)=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}my_1+t-4\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}my_2+t-4\sqrt{3}}\right)$, …… 8 分

整理得$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}=-\frac{\sqrt{3}m(y_1+y_2)+2(t-4\sqrt{3})}{3m^2y_1y_2+\sqrt{3}m(t-4\sqrt{3})(y_1+y_2)+(t-4\sqrt{3})^2}$, …………………… 9 分

所以$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}=-\frac{24\sqrt{3}m^2+2(t-4\sqrt{3})(3m^2-1)}{108m^2+24\sqrt{3}m^2(t-4\sqrt{3})+(t-4\sqrt{3})^2(3m^2-1)}$,

整理得$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}=-\frac{6tm^2-2(t-4\sqrt{3})}{(3t^2-36)m^2-(t-4\sqrt{3})^2}$, …………………… 10 分

因为$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}$为定值,所以$\frac{6t}{3t^2-36}=\frac{2(t-4\sqrt{3})}{(t-4\sqrt{3})^2}$或$t=4\sqrt{3}$(舍去,理由为当$AB$与$x$轴垂直时,$|PM|=|PN|=4\sqrt{3}$,分母无意义), …………………… 11 分

解得$t=\sqrt{3}$. …………………… 12 分

22. (1)解:$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$,令$f'(x)>0$,解得$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$,令$f'(x)<0$,解得$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$, …… …………………… 2 分

所以$f(x)$的单调减区间为$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,单调增区间为$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$; …………………… 3 分

(2)证明:不妨设 $x_1<x_2$,由(1)知 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{e}}<x_2$.

要证 $x_1+x_2<\frac{2}{\sqrt{e}}$,即证 $x_2<\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1$,即证 $f(x_2)<f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1\right)$,又 $f(x_2)=f(x_1)$,

即证 $f(x_1)-f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1\right)<0$. ………………………………………………………………………… 5 分

令 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-x\right)$,$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,则 $g'(x)=x(2\ln x+1)+\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-x\right)\left[2\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-x\right)+1\right]$,

令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=2\ln\dfrac{x}{\frac{2}{\sqrt{e}}-x}<0$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上恒成立,

所以 $h(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递减,即 $g'(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递减,所以 $g'(x)>g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$,

所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递增,所以 $g(x)<g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$,所以 $x_1+x_2<\frac{2}{\sqrt{e}}$. ……………………… 7 分

令$\frac{x_2}{x_1}=t$,$t>1$,又 $f(x_1)=f(x_2)$,即 $x_1^2\ln x_1=x_2^2\ln x_2$,所以 $\ln x_1=\frac{t^2\ln t}{1-t^2}$.

要证 $1<x_1+x_2$,即证 $1<x_1+tx_1$,有$(t+1)x_1>1$,两边取对数,

即证 $\ln x_1+\ln(t+1)>0$,即证$\frac{t^2\ln t}{1-t^2}+\ln(t+1)>0$,即证$\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}>\frac{t\ln t}{t-1}$. …………………… 10 分

令 $u(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$,$x\in(1,+\infty)$,

$u'(x)=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}>0$,可得函数 $u(x)$单调递增,可得 $u(t+1)>u(t)$,即

$\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}>\frac{t\ln t}{t-1}$,所以 $1<x_1+x_2$. ……………………………………………………………… 11 分

综上,$1<x_1+x_2<\frac{2}{\sqrt{e}}$. ………………………………………………………………………………………… 12 分

证明 $x_1+x_2>1$ 的另一种方法:

不妨设 $x_1<x_2$,由(1)可知,必有 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{e}}<x_2<1$,

可得 $0<1-x_2<1-\frac{1}{\sqrt{e}}<\frac{1}{\sqrt{e}}$, ………………………………………………………………………… 8 分

若 $x_1+x_2>1\Leftrightarrow x_1>1-x_2$,由函数 $f(x)$的单调性可得 $x_1>1-x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(1-x_2)$,

又由 $f(x_1)=f(x_2)$,有 $f(x_1)<f(1-x_2)\Leftrightarrow f(x_2)<f(1-x_2)$ ………………………………………… 9 分

$\Leftrightarrow x_2^2\ln x_2<(1-x_2)^2\ln(1-x_2)\Leftrightarrow\frac{x_2\ln x_2}{1-x_2}<\frac{(1-x_2)\ln(1-x_2)}{x_2}\Leftrightarrow\frac{x_2\ln x_2}{1-x_2}<\frac{(1-x_2)\ln(1-x_2)}{1-(1-x_2)}$, … 11 分

令 $\varphi(x)=\frac{x\ln x}{1-x}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}<x<1\right)$,有 $\varphi(x)=-\frac{x-\ln x-1}{(1-x)^2}<0$,可得函数 $\varphi(x)$单调递减,

有$\frac{x_2\ln x_2}{1-x_2}<\frac{(1-x_2)\ln(1-x_2)}{1-(1-x_2)}\Leftrightarrow\varphi(x_2)<\varphi(1-x_2)\Leftrightarrow x_2>1-x_2\Leftrightarrow x_2>\frac{1}{2}$,

又由 $4>e$,可得$\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}$,故有不等式 $x_1+x_2>1$ 成立. ……………………………………………… 12 分