高三数学考试参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查复数,考查运算求解能力.

由题意可得 $z=(3+i)(1-4i)=3-12i+i-4i^2=7-11i$,则复数 z 的实部是 7,虚部是 -11,故复数 z 的实部与虚部之和是 $7-11=-4$.

2. A 【解析】本题考查集合的运算,考查逻辑推理能力.

由题意可得 $A=\{x|x>3\}$,$B=\{x|x\geqslant a$ 或 $x\leqslant a-1\}$.因为 $A\cup B=\mathbf{R}$,所以 $a-1\geqslant 3$,即 $a\geqslant 4$.

3. B 【解析】本题考查平面向量,考查运算求解能力.

由题意可得 $-3\times 2+3m=0$,解得 $m=2$.

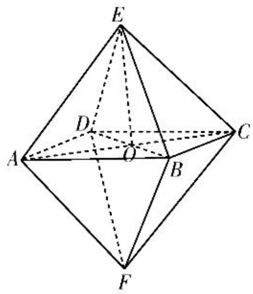
4. D 【解析】本题考查双曲线的性质,考查运算求解能力.

由题意可得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{\sqrt{5}-1}=(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2$,解得 $b^2=2$,则 $b=\sqrt{2}$,故该黄金双曲线 C 的虚轴长为 $2b=2\sqrt{2}$.

5. C 【解析】本题考查等差数列,考查运算求解能力.

由题意可得 $a_3=4$,则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=\frac{8-4}{5-3}=2$,从而 $a_n=a_3+(n-3)d=2n-2$,故 $a_{10}=2\times 10-2=18$.

6. B 【解析】本题考查化学分子结构与正八面体的体积,考查空间想象能力与阅读理解能力.



如图,连接 AC,BD,$AC\cap BD=O$,连接 OE.因为 $AE=CE$,$BE=DE$,所以 $OE\perp AC$,$OE\perp BD$,所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$.因为 $AB=BC=AE=2a$,所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}a$.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}a$,则 $OE=\sqrt{AE^2-AO^2}=\sqrt{2}a$,故该正八面体的体积为 $\frac{1}{3}\times(2a)^2\times\sqrt{2}a\times 2=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

7. C 【解析】本题考查二项式定理,考查逻辑推理能力与运算求解能力.

$(x^3-\frac{2}{x})^7$ 的展开式中,通项为 $T_{r+1}=C_7^r(x^3)^{7-r}(-\frac{2}{x})^r=(-2)^rC_7^rx^{21-4r}$.令 $21-4r=5$,得 $r=4$,则 $T_5=(-2)^4C_7^4x^5=560x^5$,故 x^5 项的系数是 560.

8. B 【解析】本题考查函数的性质,考查运算求解能力.

设 $g(x)=f(x)-2=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax$,则 $g(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})-ax=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})-ax=-g(x)$,即 $f(x)-2=-f(-x)+2$,故 $f(-2)=-f(2)+4=-3$.

9. A 【解析】本题考查统计图表,考查数据处理能力.

设 2020 年到该地旅游的游客总人数为 a,由题意可知游客中老年人、中年人、青年人的人数分别为 $0.2a$,$0.35a$,$0.45a$,其中选择自助游的老年人、中年人、青年人的人数分别为 $0.04a$,$0.0875a$,$0.135a$. 2020 年到该地旅游的游客选择自助游的青年人的人数与总游客人数的比值为 $\frac{0.135a}{a}\times 100\%=13.5\%$,所以 A 正确;因为 $0.0875a>0.135a\times\frac{1}{2}=0.0675a$,所以 B 错误;因为 $0.04a+0.0875a=0.1275a<0.135a$,所以 C 错误;2020 年到该地旅游的游客选择自助游的比率为 $\frac{0.04a+0.0875a+0.135a}{a}\times 100\%=26.25\%$,所以 D 错误.

10. D 【解析】本题考查导数与函数的零点问题,考查逻辑推理能力.

令 $f(x)=\ln x-x+a=0$,得 $a=-\ln x+x$.设 $g(x)=-\ln x+x$,则 $g'(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}$.由 $g'(x)>0$,得 $x>1$;由 $g'(x)<0$,得 $0<x<1$.所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,故 $g(x)\geqslant g(1)=1$,即 $a>1$.

11. D 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查数形结合的数学思想.

由 $f(x)=0$,得 $2\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})-1=0$,则 $\omega x+\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.当 $\omega x_1+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时,ωx_2+

$\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$，$\omega x_3+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$，则$|x_1-x_2|=\frac{2\pi}{3\omega}$，$|x_2-x_3|=\frac{4\pi}{3\omega}$，故$\lambda=\frac{1}{2}$；当$\omega x_1+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$时，$\omega x_2+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$，$\omega x_3+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{7\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$，则$|x_1-x_2|=\frac{4\pi}{3\omega}$，$|x_2-x_3|=\frac{2\pi}{3\omega}$，故$\lambda=2$. 综上，$\lambda=\frac{1}{2}$或$\lambda=2$.

12. B **【解析】本题考查简单几何体及其外接球，考查空间想象能力.**

设三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高为h，$AB=AC=a$. 因为$\angle BAC=120°$，所以$BC=\sqrt{3}a$，则该三棱柱的侧面积为$(2+\sqrt{3})ah=8+4\sqrt{3}$，故$ah=4$. 设$\triangle ABC$的外接圆半径为$r$，则$r=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=a$. 设球$O$的半径为$R$，则$R^2=r^2+(\frac{h}{2})^2=a^2+\frac{h^2}{4}=\frac{16}{h^2}+\frac{h^2}{4}\geqslant 4$（当且仅当$h=2\sqrt{2}$时，等号成立），故球$O$的表面积为$4\pi R^2\geqslant 16\pi$.

13. $\frac{7}{4}$ **【解析】本题考查分段函数求值，考查运算求解能力.**

由题意可得$f(\frac{52\pi}{3})=\sin(\frac{52\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$f(f(\frac{52\pi}{3}))=f(-\frac{\sqrt{3}}{2})=(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1=\frac{7}{4}$.

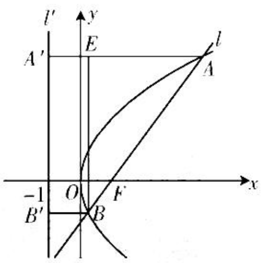
14. $\frac{7}{18}$ **【解析】本题考查古典概型，考查运算求解能力.**

由题意可知总的分配情况有$C_4^2A_3^3=6\times 6=36$种，其中满足条件的情况有$C_2^1C_3^1A_2^2+C_3^2A_2^2=14$种，故所求概率$P=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

15. 1022 **【解析】本题考查等比数列，考查运算求解能力.**

因为$S_n=2a_n-2(n\in \mathbf{N}_+)$，所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant 2)$，所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，即$a_n=2a_{n-1}$. 因为$a_1=S_1=2a_1-2$，所以$a_1=2$，则$\{a_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，故$S_9=\frac{2\times(1-2^9)}{1-2}=2^{10}-2=1022$.

16. $3+2\sqrt{2}$ **【解析】本题考查抛物线的性质，考查数形结合的数学思想与运算求解能力.**



由题意可知直线l经过焦点F，设其倾斜角为θ，则$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 如图，直线$l'$是抛物线$C$的准线，作$AA'\perp l'$，$BB'\perp l'$，$BE\perp AA'$，则$|AA'|=|AF|$，$|A'E|=|BB'|=|BF|$，故$|AE|=|AF|-|BF|$，$|AB|=|AF|+|BF|$. 因为$\cos\angle BAE=\frac{|AE|}{|AB|}=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{|AF|-|BF|}{|AF|+|BF|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{|AF|}{|FB|}=3+2\sqrt{2}$.

17. 解：(1)由女志愿者考核成绩的频率分布表可知被抽取的女志愿者的人数为$2\div 0.05=40$. ……………… 1分

因为$0.050+0.325+0.3+m+0.075=1$，所以$m=0.25$，……………… 2分

所以这次培训考核等级为优秀的女志愿者人数为$40\times(0.25+0.075)=13$. ……………… 3分

因为被抽取的志愿者人数是80，所以被抽取的男志愿者人数是$80-40=40$. ……………… 4分

由男志愿者考核成绩的频率分布直方图可知男志愿者这次培训考核等级为优秀的频率为$(0.010+0.015)\times 5=0.125$， ……………… 5分

则这次培训考核等级为优秀的男志愿者人数为$40\times 0.125=5$. ……………… 6分

(2)由(1)可知2×2列联表如下：

	优秀	非优秀	合计
男志愿者	5	35	40
女志愿者	13	27	40
合计	18	62	80

……………… 8分

$K^2=\frac{80\times(5\times27-35\times13)^2}{40\times40\times18\times62}=\frac{1280}{279}\approx4.588$. …………………… 10分

因为 $4.588>3.841$，所以有 95% 的把握认为考核等级是否是优秀与性别有关. …………………… 12分

评分细则：

(1)在第一问中，也可以先求出被抽取的女志愿者的人数，再求出 $a+b$ 的值，即考核等级为优秀的女志愿者的人数；

(2)在第二问中，2×2 列联表中错一个数据扣 1 分，最多扣 2 分，K^2 的值用分数表示，不予扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)因为 $(2b-c)\cos A-a\cos C=0$，所以 $2\sin B\cos A-\sin C\cos A-\cos C\sin A=0$， …………………… 1分

所以 $2\sin B\cos A-\sin(A+C)=0$，即 $2\sin B\cos A-\sin B=0$. …………………… 3分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. …………………… 4分

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 5分

(2)由(1)可知 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 6分

因为△ABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=3\sqrt{3}$，所以 $bc=12$. …………………… 7分

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant bc=12$，则 $a\geqslant2\sqrt{3}$. …………………… 8分

设△ABC 外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{a}{\sin A}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，即 $r\geqslant2$. …………………… 10分

故△ABC 外接圆的面积 $S=\pi r^2\geqslant4\pi$，当且仅当 $b=c=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. …………………… 11分

即当 $b=c=2\sqrt{3}$ 时，△ABC 外接圆面积的最小值为 4π. …………………… 12分

评分细则：

(1)在第一问中，也可以通过把角化为边，得到 $b^2+c^2-a^2=bc$，再由余弦定理得到 $\cos A=\frac{1}{2}$，从而求出角 A；

(2)在第二问中，没有写出取等条件，只要计算正确，不予扣分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

19. (1)证明：因为 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，$BF\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $DE/\!/BF$. …………………… 1分

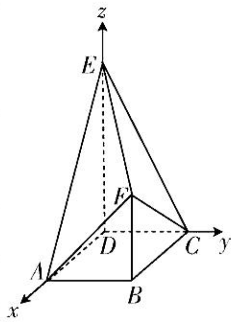
因为 $DE\subset$ 平面 CDE，$BF\not\subset$ 平面 CDE，所以 $BF/\!/$ 平面 CDE. …………………… 2分

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB/\!/CD$. …………………… 3分

因为 $CD\subset$ 平面 CDE，$AB\not\subset$ 平面 CDE，所以 $AB/\!/$ 平面 CDE. …………………… 4分

因为 $AB\subset$ 平面 ABF，$BF\subset$ 平面 ABF，且 $AB\cap BF=B$，所以平面 $ABF/\!/$ 平面 CDE. …………………… 5分

(2)解：由题意可知 DA，DC，DE 两两垂直，则以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



设 $AB=1$，则 $A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，$F(1,1,1)$，从而 $\overrightarrow{EF}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{CF}=(1,0,1)$. …………………… 7分

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=x+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=x+y-z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-2,-1)$. …………………… 9分

平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. …………………… 10分

故 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，即平面 ABF 与平面 CEF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. …………………… 12分

评分细则：

(1)在第一问中，也可以建立空间直角坐标系，分别求出平面 ABF 和平面 CDE 的法向量，通过证明平面

ABF 和平面 CDE 的法向量平行，从而得到平面 ABF∥平面 CDE；

(2)在第二问中，也可以先找出平面 ABF 和平面 CEF 所成的锐二面角 θ，再通过余弦定理求出 $\cos\theta$；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

20. 解：(1)设椭圆的半焦距为 c，

由题意可得 $\begin{cases}2c=2,\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ …………………………………… 1 分

解得 $a^2=4$，$b^2=3$. …………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 4 分

(2)因为 $P(1,t)$ 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{t^2}{3}=1$，解得 $|t|=\dfrac{3}{2}$.

①当直线 l 的斜率为 0 时，$|AB|=2a=4$，则△PAB 的面积为 $\dfrac{1}{2}|AB||t|=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{3}{2}=3$.

因为△PAB 的面积是 $\dfrac{9\sqrt{2}}{7}$，所以直线 l 的斜率为 0 不符合题意. …………………………………… 6 分

②当直线 l 的斜率不为 0 或斜率不存在时，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

则 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. …………………………………… 7 分

故 $|AB|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{(-\dfrac{6m}{3m^2+4})^2-4\times(-\dfrac{9}{3m^2+4})}=\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$. ………… 8 分

因为点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\frac{3}{2}|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{3|m|}{2\sqrt{m^2+1}}$，

所以 $\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}\times\dfrac{3|m|}{2\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{9|m|\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$. …………………………………… 9 分

因为△PAB 的面积是 $\dfrac{9\sqrt{2}}{7}$，所以 $\dfrac{9|m|\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{9\sqrt{2}}{7}$，

整理得 $31m^4+m^2-32=0$，解得 $m^2=1$，即 $m=\pm1$. …………………………………… 11 分

故直线 l 的方程为 $x=\pm y+1$，即 $x\pm y-1=0$. …………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第一问中，可以先根据 $|F_1F_2|=2$，求出 c 的值，从而求出 a^2-b^2 的值，再把点 M 的坐标代入椭圆 C 的方程，从而求出 a，b 的值，最后得到椭圆 C 的标准方程；

(2)在第二问中，没有考虑直线 l 的斜率为 0 的情况，扣 1 分；

(3)在第二问中，也可以按直线 l 的斜率存在和不存在分类讨论计算；

(4)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

21. (1)解：因为 $f(x)=xe^x-2\ln x-x^2+x-2$，所以 $f'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}-2x+1$. ………………… 1 分

则 $f'(1)=(1+1)e-2-2+1=2e-3$. …………………………………… 2 分

因为 $f(1)=e-1+1-2=e-2$， …………………………………… 3 分

所以所求切线方程为 $y-(e-2)=(2e-3)(x-1)$，即 $y=(2e-3)x-e+1$. ………………… 4 分

(2)证明：设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$. …………………………………… 5 分

由 $g'(x)>0$，得 $x>0$；由 $g'(x)<0$，得 $x<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， …………………………………… 6 分

故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号. …………………………………… 7 分

因为 $e^x\geqslant x+1$，所以 $e^{\ln x}\geqslant\ln x+1$，所以 $x\geqslant\ln x+1$，所以 $2x\geqslant2\ln x+2$. ………………… 9 分

当 $x>0$ 时，$xe^x>x^2+x$. …………………………………………………………………… 10 分
所以 $xe^x+2x>x^2+x+2\ln x+2$. ……………………………………………………………… 11 分
则 $xe^x-2\ln x-x^2+x-2>0$，即 $f(x)>0$. ………………………………………………… 12 分
评分细则：
(1)在第一问中，所求切线方程写成 $(2e-3)x-y-e+1=0$，不予扣分；
(2)在第二问中，也可以将 $f(x)>0$ 转化为 $\frac{e^x}{x}>\frac{2\ln x+2-x}{x^2}+1$，然后构造函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 和 $h(x)=\frac{2\ln x+2-x}{x^2}+1$，得到 $g(x)_{\min}>h(x)_{\max}$，从而得到 $f(x)>0$；
(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

22. 解：(1)因为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+5=0$，所以 $2x-y+5=0$.
所以直线 l 的普通方程为 $2x-y+5=0$(或 $y=2x+5$). ……………………………………… 2 分
因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+2\cos\alpha,\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，
所以曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$. …………………………………………… 4 分
(2)由题意可知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt5}{5}t,\\ y=1+\frac{2\sqrt5}{5}t\end{cases}$ (t 为参数). ………………………………… 6 分
将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的方程得 $(\frac{\sqrt5}{5}t-1)^2+(\frac{2\sqrt5}{5}t)^2=4$，即 $t^2-\frac{2\sqrt5}{5}t-3=0$. …………… 8 分
设 A,B 的参数分别是 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\frac{2\sqrt5}{5}$，$t_1t_2=-3$.
故 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac45+12}=\frac{8\sqrt5}{5}$. …………………… 10 分
评分细则：
(1)在第一问中，曲线 C 的普通方程写成 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$，不予扣分；
(2)在第二问中，可以先通过判断，得到点 P 在曲线 C 内，从而将求 $|PA|+|PB|$ 的值转化为求弦长 $|AB|$，然后求出曲线 C 的圆心 C 到直线 l 的距离 d，最后由 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$ 求出弦长 $|AB|$，即 $|PA|+|PB|$ 的值；
(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

23. 解：(1) $f(x)\geqslant 2x-1$ 等价于 $\begin{cases}x<2,\\ -x+2\geqslant 2x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x-2\geqslant 2x-1.\end{cases}$ ………………………………… 1 分
解得 $x\leqslant 1$. ……………………………………………………………………………… 3 分
故不等式 $f(x)\geqslant 2x-1$ 的解集为 $(-\infty,1]$. ………………………………………………… 4 分
(2) $f(x)\leqslant|x+a|+1$，即 $|x-2|\leqslant|x+a|+1$，即 $|x-2|-|x+a|\leqslant 1$. ………………………… 5 分
因为 $|x-2|-|x+a|\leqslant|a+2|$，所以 $f(x)\leqslant|x+a|+1$ 等价于 $|a+2|\leqslant 1$. …………………………… 7 分
解得 $-3\leqslant a\leqslant -1$. ……………………………………………………………………… 9 分
故 a 的取值范围为 $[-3,-1]$. ……………………………………………………………… 10 分
评分细则：
(1)在第一问中，也可以按 $x\leqslant\frac12$ 和 $x>\frac12$ 两种情况分别求出 x 的取值范围，再求它们的并集，即不等式的解集，只要计算正确，不予扣分，最后结果没有写成集合或区间的形式，扣 1 分；
(2)在第二问中，最后结果没有写成集合或区间的形式，扣 1 分；
(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.