

重庆八中 2022—2023 学年度（上）入学考试高三年级

数 学 试 题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x - 2| \leq 2\}$ ， $B = \{-3, -2, 1, 2\}$ ，则  $A \cap B =$

- A.  $\{-2, 1\}$                       B.  $\{-2, 2\}$                       C.  $\{-3, 2\}$                       D.  $\{1, 2\}$

2. 某单位为了了解该单位党员开展学习党史知识活动情况，随机抽取了部分党员，对他们一周的党史学习时间进行了统计，统计数据如表所示：

|            |   |    |   |    |    |
|------------|---|----|---|----|----|
| 党史学习时间（小时） | 7 | 8  | 9 | 10 | 11 |
| 党员人数       | 6 | 10 | 9 | 7  | 8  |

则该单位党员一周学习党史时间的众数及 50 百分位数分别是

- A. 8, 8.5                      B. 8, 8                      C. 9, 8                      D. 8, 9

3. 经研究发现，某昆虫释放信息素  $t$  s 后，在距释放处  $x$  m 的地方测得信息素浓度  $y$  满足

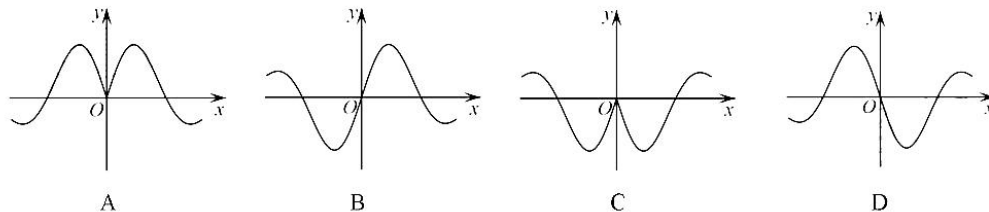
$$\ln y = -\frac{1}{2} \ln t - \frac{K}{t} x^2 + A \quad (A, K \text{ 为非零常数}).$$

已知释放 1 s 后，在距释放处 2 m 的地方测得信息素浓度为  $a$ ，

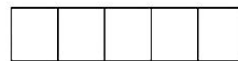
则释放信息素 4 s 后，信息素浓度为  $\frac{a}{2}$  的位置距释放处的距离为

- A. 4 m                      B. 2 m                      C.  $\frac{1}{2}$  m                      D.  $\frac{1}{4}$  m

4. 函数  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{e^x + e^{-x}}$  的图象大致是



5. 用黑白两种颜色随机地染如图所示表格中 5 个格子，每个格子染一种颜色，并且从左到右数，不管数到哪个格子，总有黑色格子数不少于白色格子数的染色方法种数为



- A. 6                      B. 10                      C. 16                      D. 20

6. 若  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且  $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \sin \beta) = \sin 2\alpha \cos \beta$ ，则下列结论正确的是

- A.  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$                       B.  $\alpha + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$                       C.  $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$                       D.  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

7. 已知  $a - 4 = \ln \frac{a}{4}$ ， $b - 3 = \ln \frac{b}{3}$ ， $c - 2 = \ln \frac{c}{2}$ ，其中  $a \neq 4$ ， $b \neq 3$ ， $c \neq 2$ ，则

- A.  $c < b < a$                       B.  $c < a < b$                       C.  $a < b < c$                       D.  $a < c < b$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 3x + 1$ , 且  $f(a^2) + f(3a - 4) < 2$ , 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $(-4, 1)$       B.  $(-3, 2)$       C.  $(0, 5)$       D.  $(-1, 4)$

二、选择题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分. 每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列有关命题的说法正确的有

- A.  $f(x) = \lg(-x^2 + 2x + 3)$  的增区间为  $(-1, 1)$   
 B. “ $x = 1$ ” 是 “ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ” 的充分不必要条件  
 C. 若集合  $A = \{x | kx^2 + 4x + 4 = 0\}$  中只有两个子集, 则  $k = 1$   
 D. 对于命题  $p$ : 存在  $x_0 \in R$ , 使得  $x_0^2 + x_0 + 1 < 0$ , 则  $\neg p$ : 任意  $x \in R$ , 均有  $x^2 + x + 1 \geq 0$

10. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\tan \frac{A}{2} = \sin(B + C)$ , 则

- A.  $\sin B \sin C$  的最大值为  $\frac{1}{2}$       B.  $\cos B + \cos C$  的最小值为 1  
 C.  $\tan B + \tan C$  的取值范围为  $[2, +\infty)$       D.  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$  为定值

11. 定义: 以双曲线的实轴为虚轴, 虚轴为实轴的双曲线与原双曲线互为共轭双曲线. 以下关于共轭双曲线的结论正确的有

- A. 与  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  共轭的双曲线是  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$   
 B. 互为共轭的双曲线渐近线不相同  
 C. 互为共轭的双曲线的 4 个焦点在同一圆上  
 D. 互为共轭的双曲线的离心率为  $e_1, e_2$ , 则  $e_1 e_2 \geq 2$

12. 已知函数  $f(x) = (x+1)(e^x - x - 1)$ , 则下列说法正确的有

- A.  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增      B.  $x = 0$  为  $f(x)$  的一个极小值点  
 C.  $f(x)$  无最大值      D.  $f(x)$  有唯一零点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $f(\frac{1}{2}x - 1) = 2x + 3$ , 若  $f(t) = 5$ , 则  $t =$  \_\_\_\_\_.

14. 若  $3\cos 2\alpha = 1 - 10\cos \alpha$ ,  $\alpha \in (-\pi, 0)$ , 则  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知  $f(x)$  为  $R$  上的奇函数, 且  $f(x) + f(2-x) = 0$ , 当  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) = 2^x$ , 则  $f(\log_2 20) =$  \_\_\_\_\_.

16.  $\frac{3}{\sin^2 20^\circ} - \frac{1}{\cos^2 20^\circ} - 64 \cos^2 20^\circ =$  \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)已知  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ .

(1)求  $\sin \beta$  的值;

(2)求  $\cos(\alpha + 2\beta)$  的值.

18.(本小题满分 12 分)已知函数  $f(x) = ax + b + \cos x (a, b \in R)$ , 若  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

(1)求  $f(x)$  的解析式;

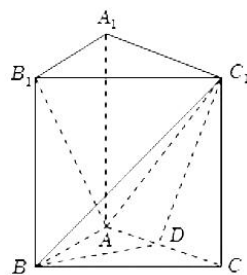
(2)求  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上的值域.

19.(本小题满分 12 分)如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 底面  $ABC$  是等边三角形,  $D$  是  $AC$  的中点, 且

$$AB = AA_1 = 2.$$

(1)证明:  $AB_1 \parallel$  平面  $BC_1D$ ;

(2)求平面  $AB_1C_1$  与平面  $ABC_1$  夹角的余弦值.



20.(本小题满分 12 分)某单位为了激发党员学习党史的积极性,现利用“学习强国”APP 中特有的“四人赛”答题活动进行比赛,活动规则如下:一天内参与“四人赛”活动,仅前两局比赛可获得积分,第一局获胜 3 分,第二局获胜得 2 分,失败均得 1 分.小张周一到周五每天都参加了两局“四人赛”活动,已知小张第一局和第二局比赛获胜的概率分别为  $p(0 < p < 1)$ ,  $\frac{1}{2}$ ,且各局比赛互不影响.

- (1) 若  $p = \frac{2}{3}$ , 记小张一天中参加“四人赛”活动的得分为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望;
- (2) 设小张在这 5 天的“四人赛”活动中,恰有 3 天每天得分不低于 4 分的概率为  $f(p)$ , 试问当  $p$  为何值时,  $f(p)$  取得最大值?

21.(本小题满分 12 分)已知  $B(-1,0), C(1,0)$  为  $\triangle ABC$  的两顶点,  $P$  为  $\triangle ABC$  的重心,边  $AC, AB$  上的两中线长度之和为 6.

- (1) 求点  $P$  的轨迹  $T$  的方程.
- (2) 已知点  $N(-3,0), E(-2,0), F(2,0)$ , 直线  $PN$  与曲线  $T$  的另一个公共点为  $Q$ , 直线  $EP$  与  $FQ$  交于点  $M$ . 试问:当点  $P$  变化时,点  $M$  是否恒在一条定直线上? 若是,请证明;若不是,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)已知函数  $f(x) = e^x - ax$ .

- (1) 若  $f(x)$  的最小值为 0, 求  $a$  的值;
- (2) 证明:当  $a > e$  时,  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ , 且  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ .

重庆八中 2022—2023 学年度（上）入学考试高三年级

数学试题参考答案

一、单选题

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | D | D | A | B | B | C | C | A |

二、多选题

|    |     |     |    |     |
|----|-----|-----|----|-----|
| 题号 | 9   | 10  | 11 | 12  |
| 答案 | ABD | ACD | CD | ABC |

三、填空题

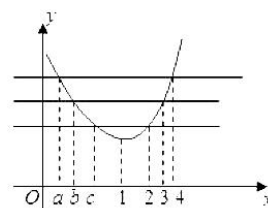
|    |                |                       |                |     |
|----|----------------|-----------------------|----------------|-----|
| 题号 | 13             | 14                    | 15             | 16  |
| 答案 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ | $-\frac{4}{5}$ | -32 |

7. 令  $f(x) = x - \ln x$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ , 则  $f(x)$  在  $(0,1)$  单调递减,  $(1,+\infty)$  单调递增, 如图所示:

$$\because a-4 = \ln \frac{a}{4}, \therefore a - \ln a = 4 - \ln 4, \therefore f(a) = f(4),$$

同理  $f(b) = f(3)$ ,  $f(c) = f(2)$ , 又  $f(2) < f(3) < f(4)$ ,

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a), \therefore a < b < c. \text{ 故选: } C.$$



8. 令  $g(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 3x$ , 则  $f(x) = g(x) + 1$ ,  $\therefore f(a^2) + f(3a-4) < 2$ ,  $\therefore g(a^2) + g(3a-4) < 0$ ,

$\because g(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} + 3(-x) = -(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 3x)$ ,  $\therefore g(x)$  是  $R$  上的奇函数,  $\therefore g(a^2) + g(3a-4) < 0$  可化为

$g(a^2) < g(4-3a)$ , 又  $\because g(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 3x = 1 - \frac{2}{2^x + 1} + 3x$ , 所以  $g(x)$  在  $R$  上是增函数,  $\therefore a^2 < 4-3a$ , 解得  $-4 < a < 1$ . 故选:  $A$ .

12.  $f'(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)$ , 记  $g(x) = (x+2)e^x - 2(x+1)$  因为  $g'(x) = (x+3)e^x - 2$ , 且  $g'(0) = 1$ ,  $g'(x)$  在区间  $(-3, +\infty)$  上显然递增, 所以记  $m$  为  $g'(x) = (x+3)e^x - 2$  的零点, 则有  $-3 < m < 0$ , 所以当  $x > m$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(m, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $g(0) = 0$ , 所以  $\forall x \in (m, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以当  $x = 0$  时,  $f(x)$  有极小值; 由上可知,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且当  $x$  趋近于正无穷时,  $f(x)$  也趋于正无穷; 易知  $f(0) = 0, f(-1) = 0$ , 故选:  $ABC$

$$16. \text{因为 } \frac{3}{\sin^2 20^\circ} - \frac{1}{\cos^2 20^\circ} = \frac{3\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin^2 20^\circ \cos^2 20^\circ} = \frac{(\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)(\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ}$$

$$= \frac{2\cos(20^\circ - 30^\circ)2\cos(20^\circ + 30^\circ)}{\frac{1}{4}\sin^2 40^\circ} = \frac{16\cos 10^\circ \cos 50^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{16\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{32\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 32\cos 40^\circ$$

所以  $\frac{3}{\sin^2 20^\circ} - \frac{1}{\cos^2 20^\circ} - 64\cos^2 20^\circ = 32\cos 40^\circ - 64 \times \frac{1}{2}(1 + \cos 40^\circ) = -32$ .

四、解答题

17.(1) 因为  $\alpha, \beta$  均为锐角, 所以  $0 < \alpha + \beta < \pi$ . 又  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ ,

所以  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$ . 所以

$$\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta)\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin \alpha = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{65} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 根据第(1)问可知  $\cos \beta = \frac{63}{65}$ , 所以

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta] = \cos(\alpha + \beta)\cos \beta - \sin(\alpha + \beta)\sin \beta = \frac{5}{13} \times \frac{63}{65} - \frac{12}{13} \times \frac{16}{65} = \frac{123}{845} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18.(1) 因为  $f(x) = ax + b + \cos x (a, b \in \mathbb{R})$ , 所以  $f'(x) = a - \sin x$ , 由题意得  $\begin{cases} f(0) = b + \cos 0 = b + 1 = 2 \\ f'(0) = a - \sin 0 = a = \frac{1}{2} \end{cases}$ ,

所以  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ , 得  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \cos x$ . \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 由(1)得  $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$ , 因为  $x \in [0, 2\pi]$ , 令  $f'(x) = 0$  解得  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ . 故

|         |   |                      |   |                                   |   |                          |           |
|---------|---|----------------------|---|-----------------------------------|---|--------------------------|-----------|
| $x$     | 0 | $(0, \frac{\pi}{6})$ | $\frac{\pi}{6}$   | $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ | $\frac{5\pi}{6}$  | $(\frac{5\pi}{6}, 2\pi)$ | $2\pi$    |
| $f'(x)$ |   | +                    | 0   | -                                 | 0   | +                        |           |
| $f(x)$  | 2 | 单调递增                 | 极大值<br>$f(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 单调递减                              | 极小值<br>$f(\frac{5\pi}{6}) = 1 + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 单调递增                     | $2 + \pi$ |

所以函数  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{6}]$  单调递增, 在  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  单调递减, 在  $[\frac{5\pi}{6}, 2\pi]$  单调递增. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}

因为  $1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 2 + \pi, 1 + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 2$ , 故函数  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上的最大值为  $2 + \pi$ , 最小值为

$$1 + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$



所以函数  $f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  的值域为  $[1 + \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \pi]$ . .....12分

19. (1) 证明: 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 设  $B_1C$  与  $BC_1$  交于点  $E$ , 连接  $DE$ ,

由于四边形  $BCC_1B_1$  是矩形, 则  $E$  为  $B_1C$  的中点, 又  $D$  是  $AC$  的中点,

$\therefore DE \parallel AB_1$ , 又  $AB_1 \not\subset$  平面  $BC_1D$ ,  $DE \subset$  平面  $BC_1D$ ,  $\therefore AB_1 \parallel$  平面  $BC_1D$ . .....4分

(2) 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 取  $A_1C_1$  的中点  $F$ , 连接  $DF$ , 则  $DF \parallel AA_1$ ,

$\because AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ,  $\therefore DF \perp$  平面  $ABC$ , 又在等边三角形  $ABC$  中,  $D$  是  $AC$  的中点,

$\therefore BD \perp AC$ , 则  $DB, DC, DF$  两两垂直, 于是以  $D$  为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系

$D - xyz$ , 因为  $AB = AA_1 = 2$ , 所以  $A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), B_1(\sqrt{3}, 0, 2), C_1(0, 1, 2)$ .

从而  $\overrightarrow{AC_1} = (0, 2, 2), \overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, 2), \overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ . .....6分

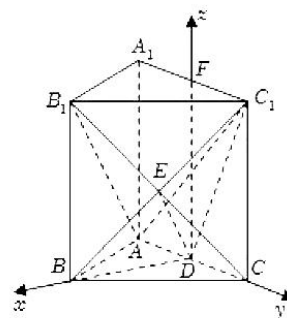
设平面  $AB_1C_1$  的法向量为  $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC_1} = 2y_1 + 2z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB_1} = \sqrt{3}x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y_1 = \sqrt{3}, \text{ 得 } z_1 = -\sqrt{3}, x_1 = 1,$$

则平面  $AB_1C_1$  的一个法向量  $\vec{n}_1 = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ , .....8分

同理可求得平面  $ABC_1$  的一个法向量  $\vec{n}_2 = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , .....10分

所以  $\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = -\frac{5}{7}$ , 所以平面  $AB_1C_1$  与平面  $ABC_1$  夹角的余弦值是  $\frac{5}{7}$ . .....12分



20. (1) 由题可知,  $X$  的可能取值为 2, 3, 4, 5,  $\therefore p = \frac{2}{3}$ ,

$$\therefore P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(X=4) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, P(X=5) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

故  $X$  的分布列为:

|     |               |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $X$ | 2             | 3             | 4             | 5             |
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{6}. \text{ .....5分}$$

(2) 设一天得分不低于 4 分为事件  $A$ ,

则  $P(A) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$ , 则  $f(p) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$ ,  $0 < p < 1$ , .....8分

则  $f'(p) = 30p^2(1-p)^2 - 20p^3(1-p) = 10p^2(1-p)(3-5p)$ ,

当  $0 < p < \frac{3}{5}$  时,  $f'(p) > 0$ ,  $f(p)$  在  $(0, \frac{3}{5})$  上单调递增,

当  $\frac{3}{5} < p < 1$  时,  $f'(p) < 0$ ,  $f(p)$  在  $(\frac{3}{5}, 1)$  上单调递减. ....11分

故当  $p = \frac{3}{5}$  时,  $f(p)$  取得最大值. ....12分

21. (1) 因为  $P$  为  $\triangle ABC$  的重心, 且边  $AC, AB$  上的两条中线长度之和为 6, 故

$$|PB| + |PC| = \frac{2}{3} \times 6 = 4 > |BC|.$$

故由椭圆的定义可知  $P$  的轨迹  $T$  是以  $B(-1, 0), C(1, 0)$  为焦点的椭圆 (不包括长轴的端点),

且  $a = 2, c = 1$ , 所以  $b = \sqrt{3}$ , 所以  $P$  的轨迹  $T$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$ ; .....4分

(2) 设直线  $PQ$  的方程为:  $x = my - 3$ ,  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ , 联立方程  $\begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$  得:

$(3m^2 + 4)y^2 - 18my + 15 = 0$ , 则  $y_1 + y_2 = \frac{18m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{15}{3m^2 + 4}$ , 所以  $2my_1 y_2 = \frac{5}{3}(y_1 + y_2)$ , .....6分

又直线  $PE$  的方程为:  $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{y_1}{my_1 - 1}(x + 2)$ ,

又直线  $QF$  的方程为:  $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2) = \frac{y_2}{my_2 - 5}(x - 2)$ ,

联立方程  $\begin{cases} y = \frac{y_1}{my_1 - 1}(x + 2) \\ y = \frac{y_2}{my_2 - 5}(x - 2) \end{cases}$ , 得  $x = \frac{2(2my_1 y_2 - y_2 - 5y_1)}{-y_2 + 5y_1}$ . ....10分

把  $2my_1 y_2 = \frac{5}{3}(y_1 + y_2)$  代入上式得:  $x = \frac{2\left(\frac{2}{3}y_2 - \frac{10}{3}y_1\right)}{-y_2 + 5y_1} = \frac{4}{3} \frac{(y_2 - 5y_1)}{-y_2 + 5y_1} = -\frac{4}{3}$ ,

所以当点  $P$  运动时, 点  $M$  恒在定直线  $x = -\frac{4}{3}$  上. ....12分



22. (1) 因为  $f(x) = e^x - ax$ , 所以  $f'(x) = e^x - a$ .

若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $R$  上单调递增, 此时不存在最小值.

若  $a > 0$ ,  $f'(x)$  在  $R$  上单调递增,  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln a$ . 则当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

故  $f(x)_{\min} = f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a(1 - \ln a) = 0$ , 解得  $a = e$ . .....4分

(2) 证明: 因为  $a > e$ , 所以由(1)可知,  $f(x)_{\min} = a(1 - \ln a) < 0$ .  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(2 \ln a) = a(a - 2 \ln a)$ ,

令函数  $g(x) = x - 2 \ln x$ , 则  $g'(x) = \frac{x-2}{x}$ ,  $g(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减, 在  $(2, +\infty)$  上单调递增,

所以  $g(x) \geq g(2) = 2 - 2 \ln 2 > 0$ , 故  $a - 2 \ln a > 0$ , 即  $f(2 \ln a) > 0$ , .....6分

所以  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ . 不妨令  $x_1 < x_2$ , 则  $0 < x_1 < \ln a < x_2 < 2 \ln a$ .

由  $\begin{cases} e^{x_1} - ax_1 = 0 \\ e^{x_2} - ax_2 = 0 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x_1 = \ln x_1 + \ln a \\ x_2 = \ln x_2 + \ln a \end{cases}$ , 则  $x_2 - x_1 = \ln x_2 - \ln x_1 > 0$ , .....8分

所以要证  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ , 即证  $\frac{x_2 - x_1}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_2} > 2(\ln x_2 - \ln x_1)$ , 即证  $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} > 2 \ln \frac{x_2}{x_1}$ . .....10分

令  $t = \frac{x_2}{x_1}$  ( $t > 1$ ), 即证明  $t - \frac{1}{t} > 2 \ln t$  ( $t > 1$ ).

令函数  $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$  ( $t > 1$ ), 则  $h'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} > 0$ ,

所以  $h(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 故  $h(t) > h(1) = 0$ .

所以  $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} > 2 \ln \frac{x_2}{x_1}$ , 即  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ .

.....12分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

