2023届高三一轮复习联考(三) 全国卷
理 科 数 学 试 题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|1<x<2\}$,$B=\{x||x|\leqslant 1\}$,则 $A\cup B=$

A.$[-1,2)$　　B.$(-\infty,2)$　　C.$[-1,3)$　　D.$[-1,2]$

2.已知复数 $z=i(i+1)$,则 $|\bar{z}|=$

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

3.已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2x+m>0$,则满足命题 p 为真命题的一个充分条件是

A.$m>2$　　B.$m<0$　　C.$m<1$　　D.$m\geqslant 1$

4.若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0,\\ \log_2 x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]=$

A.-2　　B.2　　C.-3　　D.3

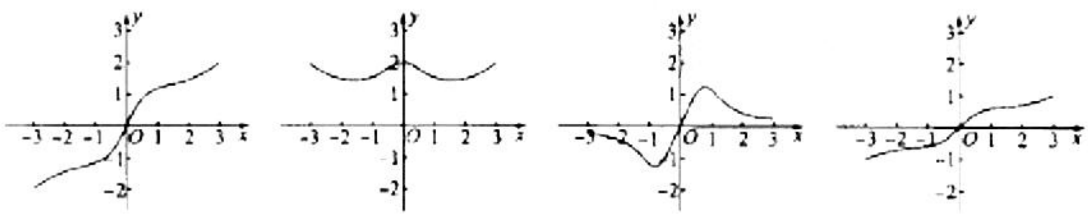
5.已知$\{a_n\}$是各项不全为零的等差数列,前 n 项和是 S_n,且 $S_{20}=S_{24}$,若 $S_m=S_{26}(m\neq 26)$,则正整数 $m=$

A.20　　B.19　　C.18　　D.17

6.已知平面向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{11}$,则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影为

A.$\sqrt{3}$　　B.1　　C.2　　D.$\sqrt{6}$

7.函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2+1}$ 在$[-3,3]$上的大致图象为



A　　B　　C　　D

8.已知角 α 的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $M(2,m)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $-\sqrt{5}$

9.已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $q^2\neq1$，$a_4^2=a_ma_n$（其中 $m,n\in N^*$），则 $\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为

A.6　　B.16　　C. $\frac{3}{2}$　　D.2

10.已知函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(0,\frac{4}{3}\pi\right]$　　B. $\left[\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right]$　　C. $\left[\frac{2}{3}\pi,+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$

11.设 $a=4\sin1$，$b=3\sin2$，$c=2\sin3$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}4\sin\pi x, & 0<x\leqslant1,\\ 2^{x-1}+x, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解，则实数 m 的取值集合为

A. $(3,5)$　　B. $[3,5]$　　C. $(-3,-1)$　　D. $[-3,-1]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$______.

14.设 m,n 为不重合的直线，α,β,γ 为不重合的平面，下列是 $\alpha\parallel\beta$ 成立的充分条件的有______（只填序号）.

①$m\subset\alpha$，$m\parallel\beta$　②$m\subset\alpha$，$n\perp\beta$，$n\perp m$　③$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$　④$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$

15.已知数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，其前 n 项和 $S_n=-n^2+2n+m$，则实数 m 的取值范围是______.

16.已知点 A,B,C 均在球 O 的球面上运动，且满足 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 6，则球 O 的体积为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2x+1$，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象.记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=4$，$bc=12$，$g\left(\frac{A}{2}\right)=1$.

(1)求角 A；

(2)若角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D，求 AD 的长.

18.(12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=2^{a_n}+a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.(12 分)已知$\triangle ABC$ 中，三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$C=\frac{\pi}{4}$，$a\cos A-c\cos C=2b\cos B$.

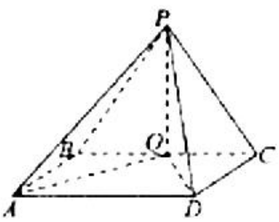
(1)求 $\tan A$；

(2)若 $c=2\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

20.(12 分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，O 是 BC 的中点，$PB=PC=\sqrt{3}$，$PD=BC=2AB=2$.

(1)求证：平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$；

(2)求直线 AD 与平面 PCD 所成角的正弦值.



21.（12分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）证明：对 $\forall x\in(0,+\infty)$，均有 $f(x)<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}-2$.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修4－4：坐标系与参数方程］（10分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2a-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t,\end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$.

（1）求直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\ y'=y,\end{cases}$ 得到曲线 C'，若直线 l 与曲线 C' 有公共点，试求 a 的取值范围.

23.［选修4－5：不等式选讲］（10分）

已知函数 $f(x)=|x+2|+2|x-t|\ (t>0)$，若函数 $f(x)$ 的最小值为5.

（1）求 t 的值；

（2）若 a,b,c 均为正实数，且 $2a+b+c=t$，求 $\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值.

2023届高三一轮复习联考(三)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由 $|x|\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cup B=\{x|-1\leqslant x<2\}$.故选 A.

2.B 【解析】$z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)=-1+\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=-1-\mathrm{i}$，即 $|z|=\sqrt{2}$，故选 B.

3.A 【解析】∵命题 p 为真命题，∴不等式 $x^2-2x+m>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，∴$\Delta=4-4m<0$，解得 $m>1$，命题 p 为真命题的一个充分条件即为所求范围 $\{m|m>1\}$ 的子集，故选 A.

4.D 【解析】$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)=8$，$f(8)=\log_2 8=3$，故选 D.

5.C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差分别为 a_1,d，则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 S_n 可看成关于 n 的二次函数，由二次函数图象的对称性及 $S_{20}=S_{24}$，$S_m=S_{26}$，可得 $\frac{20+24}{2}=\frac{26+m}{2}$，解得 $m=18$.故选 C.

6.B 【解析】$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{11}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=1$，故选 B.

7.A 【解析】$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数，排除 B 选项，又 $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{5}>1$，排除 C，D 选项，故选 A.

8.A 【解析】由题意，角 α 的终边经过点 $M(2,m)$，且 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，可知 $m<0$，则 $\sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+4}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得 $m=-\sqrt{5}$，此时 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 A.

9.D 【解析】由等比数列的性质，可得 $m+n=8$，$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}(m+n)\left(\frac{9}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{8}\left(10+\frac{m}{n}+\frac{9n}{m}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(10+2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{9n}{m}}\right)=2$，

当且仅当 $m=6,n=2$ 时，等号成立，因此，$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 2.故选 D.

10.B 【解析】由题意可得 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，结合图象，$f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，$0\leqslant x\leqslant a$，$\frac{\pi}{3}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+a$，于是 $\pi\leqslant\frac{\pi}{3}+a\leqslant\frac{5\pi}{3}$，解得 $\frac{2\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{4\pi}{3}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right]$.故选 B.

11.B 【解析】设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=-x\sin x$，

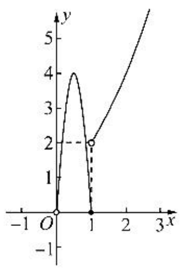
当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递减，$g(x)<g(0)=0$，∴$f'(x)<0$，故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上递减，∵$0<2<3<\pi$，

∴$f(3)<f(2)$，$\frac{\sin 3}{3}<\frac{\sin 2}{2}$，$2\sin 3<3\sin 2$，故 $c<b$.

$0<1<\pi-2<\pi$，$\frac{\sin(\pi-2)}{\pi-2}<\sin 1$，$\sin 2<(\pi-2)\sin 1$，$3\sin 2<3(\pi-2)\sin 1<4\sin 1$，故 $b<a$，

故 $c<b<a$，故选 B.

12.C 【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，



令 $t=f(x)$，则 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 可化为 $t^2-(2-m)t+1-m=(t-1+m)(t-1)=0$，

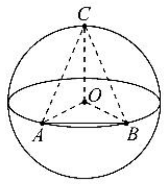
则 $t_1=1$ 或 $t_2=1-m$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数之和为 5 个，由图可得函数 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$ 的交点个数为 2，所以 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_2$ 的交点个数为 3 个，即此时 $2<1-m<4$，解得 $-3<m<-1$，故选 C.

13.$-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.故答案为 $-\frac{1}{2}$.

14.④ 【解析】根据线面的位置关系易知，①②③中面 α 和面 β 可能相交也可能平行，④：若 $m\perp\alpha$ 且 $m\perp\beta$，根据面面平行的判定可知垂直于同一直线的两平面互相平行，故④正确.

15.$(-2,+\infty)$ 【解析】当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+2n+m-[-(n-1)^2+2(n-1)+m]=-2n+3$，
故可知当 $n\geqslant 2$ 时，$\{a_n\}$ 单调递减，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，只需满足 $a_2<a_1$，即 $-1<1+m\Rightarrow m>-2$.

16.$32\sqrt{3}\pi$ 【解析】如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\frac{\sqrt{3}}{12}R^3=6$，故 $R^3=24\sqrt{3}$，则球 O 的体积为 $V=\frac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$.



17.【解析】(1) $\because f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，………… 2 分

$\because g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，………… 4 分

$\therefore g\left(\frac{A}{2}\right)=2\cos A=1$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 $\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.………… 6 分

(2)因为角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D，

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，即 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}$，

可得 $AD=\frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$，………… 8 分

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc$，而 $bc=12$，

得 $(b+c)^2=52$，………… 10 分

因此 $AD=\frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{39}}{13}$. ………… 12 分

18.【解析】(1)由题，当 $n=1$ 时，$2a_1=(2-3)\cdot 2^{1+1}+6=2$，即 $a_1=1$.………… 1 分

$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(2n-5)\cdot 2^n+6$②，………… 3 分

①－②得 $2^na_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6-(2n-5)\cdot 2^n-6=(2n-1)\cdot 2^n$，………… 5 分

所以 $a_n=2n-1$. ………… 6 分

(2)由(1)知，$b_n=2^{a_n}+a_n=2^{2n-1}+2n-1$，

则 $T_n=(2+1)+(2^3+3)+(2^5+5)+\cdots+(2^{2n-1}+2n-1)$………… 8 分

$=(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$………… 10 分

$=\frac{2\times(1-4^n)}{1-4}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{2^{2n+1}+3n^2-2}{3}$. ………… 12 分

19.【解析】(1)解法一：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$\sin 2B=\sin A\cos A+\sin C\cos C$.………… 1 分

$C=\frac{\pi}{4}$，$A+B+C=\pi$，$\sin 2B=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)=-\cos 2A$. ………… 2 分

所以 $-\cos 2A=\sin A\cos A+\frac{1}{2}$，………… 3 分

$\sin^2 A-\cos^2 A-\sin A\cos A=\frac{1}{2}$，………… 4 分

$\dfrac{\tan^2A-1-\tan A}{\tan^2A+1}=\dfrac{1}{2}$，化简得 $\tan^2A-2\tan A-3=0$，………… 5 分

解得 $\tan A=3$ 或 $\tan A=-1$(舍去).………… 6 分

解法二：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C$，………… 1 分

即 $2\sin 2B=\sin[(A+C)+(A-C)]+\sin[(A+C)-(A-C)]$，………… 2 分

即 $\sin 2B=\sin(A+C)\cos(A-C)$，………… 3 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\sin(A+C)=\sin B$，

所以 $2\sin B\cos B=\sin B\cos(A-C)$，

又 $0<B<\pi$，故 $\sin B\neq 0$，

所以 $2\cos B=\cos(A-C)$，………… 4 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\cos B=-\cos(A+C)$，

化简得 $\sin A\sin C=3\cos A\cos C$，………… 5 分

因此 $\tan A\tan C=3$ 且 $\tan C=1$.

所以 $\tan A=3$.………… 6 分

(2)由(1)知 $\tan A=3$，

因此 $\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=2$.………… 7 分

所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，………… 8 分

$\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，………… 9 分

$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，………… 10 分

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$a=6$，………… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=12$.………… 12 分

20.【解析】(1)因为 $PB=PC$，O 是 BC 的中点，所以 $PO\perp BC$，………… 1 分

在直角 $\triangle POC$ 中，$PC=\sqrt{3}$，$OC=1$，所以 $PO=\sqrt{2}$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，所以 $DO=\sqrt{2}$.

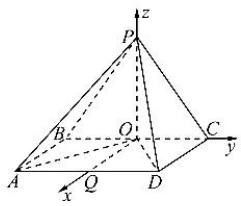
又因为 $PD=2$，所以在 $\triangle POD$ 中，$PD^2=PO^2+OD^2$，即 $PO\perp OD$，………… 3 分

而 $BC\cap OD=O$，$BC,OD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，………… 4 分

而 $PO\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$.………… 5 分

(2)由(1)知，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，取 AD 中点 Q，连接 OQ，易知 OQ,OC,OP 两两相互垂直，

如图，分别以 OQ,OC,OP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $A(1,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，………… 7 分

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,\sqrt{2})$.………… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $y=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2},1)$，………… 10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，………… 11 分

所以直线 AD 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.………… 12 分

21.【解析】(1)因为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$, ………… 1分

则 $f(1)=2,f'(1)=-2$, ………… 2分

则切线方程为 $y-2=-2\times(x-1)$,即 $2x+y-4=0$. ………… 3分

曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-4=0$. ………… 4分

(2)若证 $f(x)<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$,即证 $f(x)-2=\frac{1}{x}-\ln x-1=\frac{1-x\ln x-x}{x}<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$. ………… 5分

令 $g(x)=1-x-x\ln x,x>0$,则 $g'(x)=-2-\ln x$. ………… 6分

当 $x\in(0,e^{-2})$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)_{\max}=g(e^{-2})=1+e^{-2}$,即 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$. ………… 7分

令 $h(x)=\ln(x+1)-x,x>0$,则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}<0$,

可知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, ………… 8分

所以 $h(x)<h(0)=0$,即当 $x>0$ 时,$0<\ln(x+1)<x$,从而 $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{\ln(x+1)}$, ………… 9分

所以当 $0<x<1$ 时,$1-x-x\ln x>0$,$\frac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant\frac{1+e^{-2}}{x}<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$, ………… 10分

当 $x\geqslant 1$ 时,$1-x-x\ln x\leqslant 0$,$\frac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant 0<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$, ………… 11分

综上所述,对 $\forall x\in(0,+\infty)$,均有 $f(x)<\frac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$. ………… 12分

22.【解析】(1)由题 $\begin{cases}x=2a+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数),消去参数 t 得直线 $l:x-\sqrt{3}y-2a=0$; ………… 2分

$\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$,即 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$,即曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………… 5分

(2)由 $\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\ y'=y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2x',\\ y=y',\end{cases}$ 又 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,所以 $\frac{(2x')^2}{4}+(y')^2=1$,即 $x'^2+y'^2=1$,

所以曲线 C' 的方程是 $x^2+y^2=1$, ………… 8分

由 $d=\frac{|-2a|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant a\leqslant 1$.

所以 a 的取值范围是 $[-1,1]$. ………… 10分

23.【解析】(1)$f(x)=|x+2|+2|x-t|=|x+2|+|x-t|+|x-t|$,

$y=|x+2|+|x-t|\geqslant|x+2-(x-t)|=|2+t|=2+t$,当 $-2\leqslant x\leqslant t$ 时等号成立, ………… 3分

又知当 $x=t$ 时,$|x-t|$ 取得最小值,所以当 $x=t$ 时,$f(x)$ 有最小值,

此时 $f(x)_{\min}=f(t)=t+2=5$,

所以 $t=3$. ………… 5分

(2)由(1)知,$2a+b+c=3$,

$\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{2}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=\frac{1}{3}(1+2+1)^2=\frac{16}{3}$, ………… 8分

当且仅当 $a=\frac{3}{8},b=\frac{3}{2},c=\frac{3}{4}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$. ………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。