高三联考数学参考答案(文科)

1. D　全称量词命题的否定是特称量词命题.

2. B　由题意可得 $A=\{-1,3\}$,则$\complement_U A=\{-3,0,1\}$.

3. A　由题意可得 $f'(x)=3x^2-2ax+4$,则 $f'(2)=3\times2^2-4a+4=0$,解得 $a=4$. 经验证当 $a=4$ 时,函数 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值.

4. C　令 $x-2=0$,得 $x=2$,则 $f(0)=f(2-2)=2^2-2+3=5$.

5. C　由图可知 $f(x)$在$(-\infty,3)$上单调递增,在$(3,+\infty)$上单调递减,则 $f(x)$有一个极大值,没有极小值,故 A,B,D 错误,C 正确.

6. B　设甲、乙、丙的年龄分别为 x,y,z,根据已知条件得 $x>y$. 若丙的年龄大于乙的年龄,则 $z>y$,则 $y+z>2y$,因为 $2x>2y$,所以 $y+z>2x$ 未必成立. 若乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍,则 $y+z>2x>2y$,则 $y+z>2y$,即 $z>y$,所以丙的年龄大于乙的年龄. 故“丙的年龄大于乙的年龄”是“乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍”的必要不充分条件.

7. C　由题意可知$\frac{e^{5a+b}}{e^{a+b}}=e^{4a}=3+1$,解得 $e^a=\sqrt{2}$,由 $e^{3a+b}=60$,可得 $e^{6a+b}=e^{3a+b}\cdot(e^a)^3=60\times(\sqrt{2})^3=120\sqrt{2}\approx169.2$(元/千克),最接近 170 元/千克.

8. A　设 $g(x)=f(x)+3=x^5+\tan x$,则 $g(-x)=(-x)^5+\tan(-x)=-x^5-\tan x=-g(x)$,故 $g(x)$是奇函数,从而 $g(m)=-g(-m)$,即 $f(m)+3=-[f(-m)+3]$,即 $f(m)=-f(-m)-6=-4$.

9. B　设 $f(x)=x^3-x^2-x+2$,则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$. 由 $f'(x)>0$,得 $x<-\frac{1}{3}$或 $x>1$,由 $f'(x)<0$,得$-\frac{1}{3}<x<1$,则 $f(x)$在$(-\infty,-\frac{1}{3})$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$(-\frac{1}{3},1)$上单调递减,从而 $f(x)$在$(0,2)$上的最小值为 $f(1)=1>0$,故命题 p 是假命题. 由 $x=2,y=3$,得 $x+y>4$,则命题 q 是假命题,故$(\neg p)\wedge(\neg q)$是真命题.

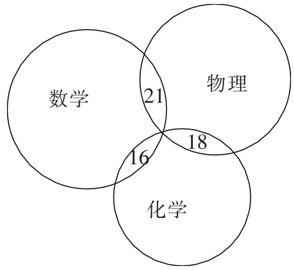
10. B　$a=-\log_3 2,b=-\log_4 10,c=-\log_2 3$,因为 $\log_4 10>\log_4 9=\log_2 3>1>\log_3 2$,所以 $b<c<a$.

11. C　令 $y=1$,则 $f(x+1)=f(x)+1$,$f(2023)=f(2022)+1=f(2021)+2=f(2020)+3=\cdots=f(1)+2022=2023$.

12. B　由 $y\ln y=e^{2x}-y\ln(2x)$,得 $y\ln y+y\ln(2x)=e^{2x}(x>0,y>0)$,则 $y\ln(2xy)=e^{2x}$,所以 $2xy\ln(2xy)=2xe^{2x}$,即 $e^{\ln(2xy)}\ln(2xy)=2xe^{2x}$. 设 $f(x)=xe^x(x>0)$,则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$,可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数,所以 $\ln(2xy)=2x$,则 $2xy=e^{2x}$,即 $y=\frac{e^{2x}}{2x}$. 令 $g(x)=\frac{e^{2x}}{2x}$,则 $g'(x)=\frac{(2x-1)e^{2x}}{2x^2}$,所以 $g(x)$在$(0,\frac{1}{2})$上为减函数,在$(\frac{1}{2},+\infty)$上为增函数,可得 $y_{\min}=g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=e$.

13. $(3,5)$　由题意可得$\begin{cases}5-x>0,\\x-3>0,\end{cases}$解得 $3<x<5$,即函数 $f(x)$的定义域是$(3,5)$.

14. 7　如图，设该校只参加一项竞赛的同学有 x 名，则 $21+16+18+x=62$，解得 $x=7$.



15. $[7,+\infty)$　由 $x^2+a\leqslant ax-3$，得 $a(x-1)\geqslant x^2+3$. 当 $x=1$ 时，$a\in\varnothing$. 当 $x\in(1,2]$时，$x-1\in(0,1]$，则 $a\geqslant\dfrac{x^2+3}{x-1}$. 因为"$\exists x\in[1,2]$，$x^2+a\leqslant ax-3$"是真命题，所以 $a\geqslant(\dfrac{x^2+3}{x-1})_{\min}$. 因为$\dfrac{x^2+3}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}+2\in[7,+\infty)$，所以 $a\geqslant 7$.

16. $(2,4)$　设 $g(x)=xf(x)-2x$，则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)-2$. 因为 $f(x)+xf'(x)>2$，所以 $g'(x)>0$，则 $g(x)$是$(-5,5)$上的增函数. 不等式$(2x-3)f(2x-3)-(x-1)f(x-1)>2x-4$ 等价于$(2x-3)f(2x-3)-2(2x-3)>(x-1)f(x-1)-2(x-1)$，即 $g(2x-3)>g(x-1)$，则$\begin{cases}-5<2x-3<5,\\-5<x-1<5,\\2x-3>x-1,\end{cases}$解得 $2<x<4$.

17. 解：由题意可得 $A=\{x\mid -1<x<6\}$. ………………………………………………… 2 分

(1)当 $a=0$ 时，$B=\{x\mid -1\leqslant x<5\}$，……………………………………………… 3 分

则 $A\cap B=\{x\mid -1<x<5\}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)当 $B=\varnothing$时，$2a-1\geqslant a+5$，解得 $a\geqslant 6$. ……………………………………… 7 分

当 $B\neq\varnothing$时，$\begin{cases}a<6,\\2a-1>-1,\\a+5\leqslant 6,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant 1$. ……………………………………… 9 分

综上，a 的取值范围是$(0,1]\cup[6,+\infty)$. ………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-a$，所以 $f(-x)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}-a=\dfrac{2^x}{2^x+1}-a$. ………………… 2 分

因为 $f(x)$是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，即$\dfrac{2^x}{2^x+1}-a=-(\dfrac{1}{2^x+1}-a)$，…………… 4 分

即 $2a=\dfrac{1}{2^x+1}+\dfrac{2^x}{2^x+1}=1$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$，易证 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数. ……………………… 8 分

因为 $f(-1)=\dfrac{1}{6}$，$f(3)=-\dfrac{7}{18}$，………………………………………………………… 10 分

所以 $f(x)$在$[-1,3]$上的值域为$[-\dfrac{7}{18},\dfrac{1}{6}]$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意可得 $f'(x)=\dfrac{3}{x}+x-4$，………………………………………………… 1 分

则 $f'(2)=\dfrac{3}{2}+2-4=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 2 分

因为 $f(2)=3\ln 2+2-8+1=3\ln 2-5$， ························ 3 分

所以所求切线方程为 $y-(3\ln 2-5)=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-6\ln 2+8=0$. ············ 4 分

(2)由题意可得 $g'(x)=\frac{3}{x}+x-4=\frac{x^2-4x+3}{x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x}$.

由 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>3$，由 $g'(x)<0$，得 $1<x<3$，

则 $g(x)$在$(0,1)$和$(3,+\infty)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减. ························ 5 分

当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$时，$g(x)\to +\infty$，且 $g(1)=-m-\frac{5}{2}$，$g(3)=-m-\frac{13}{2}+3\ln 3$. ························ 6 分

当$-m-\frac{5}{2}<0$，即 $m>-\frac{5}{2}$时，$g(x)$有且仅有 1 个零点； ························ 7 分

当$-m-\frac{5}{2}=0$，即 $m=-\frac{5}{2}$时，$g(x)$有 2 个零点； ························ 8 分

当$\begin{cases}-m-\frac{5}{2}>0,\\ -m-\frac{13}{2}+3\ln 3<0,\end{cases}$即 $3\ln 3-\frac{13}{2}<m<-\frac{5}{2}$时，$g(x)$有 3 个零点； ················ 9 分

当$-m-\frac{13}{2}+3\ln 3=0$，即 $m=3\ln 3-\frac{13}{2}$时，$g(x)$有 2 个零点； ························ 10 分

当$-m-\frac{13}{2}+3\ln 3>0$，即 $m<3\ln 3-\frac{13}{2}$时，$g(x)$有且仅有 1 个零点. ················ 11 分

综上，当 $m>-\frac{5}{2}$或 $m<3\ln 3-\frac{13}{2}$时，$g(x)$有且仅有 1 个零点；当 $m=-\frac{5}{2}$或 $m=3\ln 3-\frac{13}{2}$时，$g(x)$有 2 个零点；当 $3\ln 3-\frac{13}{2}<m<-\frac{5}{2}$时，$g(x)$有 3 个零点. ················ 12 分

20. 解：(1)由题意可得 $27000a+630=180$，解得 $a=-\frac{1}{60}$. ························ 2 分

当对甲项目投资 30 万元时，对乙项目投资 170 万元，

则$-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$，解得 $b=110$. ························ 4 分

设对甲项目的投资金额为 x 万元，则对乙项目的投资金额为 $200-x$ 万元，

则$\begin{cases}x\geqslant 10,\\ 200-x\geqslant 10,\end{cases}$解得 $10\leqslant x\leqslant 190$. ························ 5 分

故 $f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16200)(10\leqslant x\leqslant 190)$. ························ 7 分

(2)设 $h(x)=x^3-2x^2-900x-16200(10\leqslant x\leqslant 190)$，$h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$. ························ 8 分

当 $x\in[10,18)$时，$h'(x)<0$，当 $x\in(18,190]$时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$在$[10,18)$上单调递减,在$(18,190]$上单调递增,则 $h(x)_{\min}=h(18)=-27216$. ……………………………………………………………………………… 10 分

故 $f(x)_{\max}=f(18)=453.6$,即对甲项目投资 18 万元,对乙项目投资 182 万元,才能使总收益 $f(x)$取得最大值 453.6 万元. ………………………………………… 12 分

21.(1)解:由$\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 1 分

得 $1\leqslant x\leqslant 4$, ……………………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$的定义域为$[1,4]$. ………………………………………………………… 3 分

(2)证明:$[f(x)]^2=4-x+x-1+2\sqrt{(4-x)(x-1)}=3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}$, …… 5 分

因为 $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}\geqslant 0$,所以 $f(x)=\sqrt{3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}}$. ………… 6 分

当 $1\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$时,$f(x)$单调递增;当$\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 时,$f(x)$单调递减. ………………… 7 分

先证明充分性.

若$\frac{3}{2}<a\leqslant 3$,则$\frac{5}{2}<a+1\leqslant 4$, ……………………………………………………… 8 分

所以 $f(x)$在区间$[a,a+1)$上存在最大值,且最大值为 $f(\frac{5}{2})$或 $f(a)$,所以充分性成立. ……………………………………………………………………………… 9 分

再证明必要性.

若 $f(x)$在区间$[a,a+1)$上存在最大值,则 $f(x)$在区间$[a,a+1)$上可能先增后减,还可能单调递减, …………………………………………………………………… 10 分

则$\frac{5}{2}\in[a,a+1)$或 $a\geqslant\frac{5}{2}$,又$[a,a+1)\subseteq[1,4]$,所以$\frac{3}{2}<a\leqslant 3$,所以必要性成立. … 11 分

综上,$f(x)$在区间$[a,a+1)$上存在最大值的充要条件是$\frac{3}{2}<a\leqslant 3$. ………………… 12 分

22.(1)解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$, ………………………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-3=\frac{1-3x}{x}$. ……………………………………………………… 2 分

当 $x\in(0,\frac{1}{3})$时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\frac{1}{3},+\infty)$时,$f'(x)<0$. ………………………… 3 分

故 $f(x)$的单调递增区间为$(0,\frac{1}{3})$,单调递减区间为$(\frac{1}{3},+\infty)$. ………………… 5 分

(2)证明:由 $f(x)\leqslant x(ae^x-4)+b$,得 $\ln x\leqslant x(ae^x-1)+b$,则 $x+\ln x\leqslant axe^x+b$, … 6 分

所以 $\ln(xe^x)\leqslant axe^x+b$. ……………………………………………………………… 7 分

令 $t=xe^x>0$,则 $\ln t\leqslant at+b$,若 $a\leqslant 0$,则 $\ln t\leqslant at+b$ 对 $t>0$ 不可能恒成立,

所以 $a>0$. ……………………………………………………………………………… 8 分

令函数 $g(t)=at+b-\ln t$,则 $g'(t)=\frac{at-1}{t}$,

当 $t\in(0,\frac{1}{a})$时,$g'(t)<0$,当 $t\in(\frac{1}{a},+\infty)$时,$g'(t)>0$,

所以 $g(t)_{\min}=g(\frac{1}{a})=1+b+\ln a\geqslant0$, ………………………………………………………… 9 分

所以 $b\geqslant-\ln a-1$,所以 $a+b\geqslant a-\ln a-1$. ……………………………………………… 10 分

令函数 $h(a)=a-\ln a-1$,则 $h'(a)=\frac{a-1}{a}$,

当 $a\in(0,1)$时,$h'(a)<0$,当 $a\in(1,+\infty)$时,$h'(a)>0$,

所以 $h(a)_{\min}=h(1)=0$,…………………………………………………………………………… 11 分

所以 $a+b\geqslant a-\ln a-1\geqslant0$,所以 $a+b\geqslant0$. ……………………………………………… 12 分

自主选拔在线 微信号：zizzsw