重庆市第八中学2023届高考适应性月考卷（六）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	D	B	B	D

【解析】

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>-2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}\}$，解得 $B=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\leqslant -2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid -2<x<3\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，故选D.

2. $z=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 z 的共轭复数的虚部为 $\dfrac{3}{2}$，故选B.

3. 利用插空法 $A_3^3C_4^2=36$ 种，故选B.

4. $EF=2$，则所得的棱锥侧面的高为2，棱锥的高为 $h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，其体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故选C.

5. ∵事件 A 发生的个数 $n(A)=5\times 5-4\times 4=9$，又事件 A，B 同时发生的个数 $n(AB)=2\times 4=8$，∴ $P(B\mid A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{8}{9}$，故选D.

6. 以 C 为原点，CA 为 x 轴建系，$B(0,\ 4)$，$N(2,\ 0)$，$M(x,\ 4-x)$，所以 $\overrightarrow{NM}=(x-2,\ 4-x)$，$\overrightarrow{BM}=(x,\ -x)$，所以 $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BM}=x(x-2)-x(4-x)=2x^2-6x=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}\geqslant-\dfrac{9}{2}$，所以最小值为 $-\dfrac{9}{2}$，故选B.

7. 由题意可得，M 个超导量子比特共有 2^M 种叠加态，两边同时取以10为底的对数：$\lg N=\lg 2^M=M\lg 2$，由 N 是一个20位的数，可以得到 $10^{19}\leqslant N<10^{20}$，则 $19\leqslant\lg N<20$，从而有 $\dfrac{19}{\lg 2}\leqslant M<\dfrac{20}{\lg 2}$，将 $\lg 2\approx 0.3010$ 代入则有 $63.1\leqslant M<66.4$，则 $M=64,\ 65,\ 66$，共3个数，故选B.

8．函数 $f(x)=a\cdot\frac{e^{2x}}{x}-x+\ln x(a\in\mathbf{R})$，定义域为 $(0,+\infty)$，因为 $\forall s\in(0,+\infty)$，总 $\exists t\in(0,+\infty)$ 使得 $f(t)<f(s)$，则有函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有最小值，又注意到 $f(x)=a\frac{e^{2x}}{x}-\ln\frac{e^{2x}}{x}$，令 $t=g(x)=\frac{e^{2x}}{x}$，$h(t)=at-\ln t$，一方面，对 $g(x)$ 而言：$g'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，从而 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=2e$，且 $x\to+\infty$，$g(x)\to+\infty$，从而 $g(x)$ 值域为 $[2e,+\infty)$，则只需要 $h(t)=at-\ln t$ 在 $[2e,+\infty)$ 上不存在最小值；若 $a\leqslant0$，则 $h(t)$ 在 $[2e,+\infty)$ 上单调递减，符合要求；若 $a>0$，则 $h'(t)=a-\frac{1}{t}$，令 $h'(t)=0$，则 $t=\frac{1}{a}$，从而 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调上递增，易知当 $a>0$ 时，$h(t)$ 总在 $[2e,+\infty)$ 上存在最小值，舍；综上，a 的取值范围为 $(-\infty,0]$，故选 D．

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	CD	BD	ABD	BCD

【解析】

9．椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{5-4}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，A 错误；当长方形的边分别与 x，y 轴平行时，蒙日圆方程为 $x^2+y^2=9$，所以 B 错误，C 正确；因为蒙日圆为长方形的外接圆，设 $r=|OA|=3$，$\angle AOB=\theta$，则矩形面积公式为 $S=4\cdot\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\theta=18\sin\theta$，显然 $\sin\theta=1$，即矩形四条边都相等，为正方形时，$S_{\max}=18$，D 正确，故选 CD．

10．因为 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|$，所以 $\frac{3\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，所以 $\omega=\frac{2k}{3}+\frac{1}{6}(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $\pi<T<2\pi$，所以 $\pi<\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi$，所以 $1<\omega<2$，所以 $\omega=\frac{3}{2}$，A 错；对于 B，$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{5\pi}{2}=1$，B 正确；对于 C，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，C 错；对于 D，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$，D 正确，故选 BD．

11. 由已知可得 $x^2=\dfrac{1}{1+y^2}$，因为 $y^2\geqslant 0$，所以 $0<x^2\leqslant 1$，所以 $x^2y^2=1-x^2\in[0,1)$，所以 $xy<1$，A 正确；又由 $x^2y=\dfrac{y}{y^2+1}$，则当 $y\geqslant 0$ 时，$x^2y\geqslant 0$；当 $y<0$ 时，$x^2y=\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}\geqslant -\dfrac{1}{2}$，从而 B 正确；$x^2(1+y)^2=x^2(y^2+2y+1)=1+2x^2y\leqslant 1+x^2(1+y^2)=2$，当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{2}$，$y=1$ 时取等号，所以 $x(x+y)\leqslant\sqrt{2}$，C 错误；由已知得 $x^2=1-x^2y^2$，所以 $x^2+xy=1+xy-(xy)^2=-\left(xy-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$，当 $xy=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，D 正确，故选 ABD.

12. 由题意，记 $[\![x]\!]$ 表示与实数 x 最接近的整数且 $k=[\![\sqrt{n}]\!]$. 当 $n=1$ 时，可得 $\sqrt{n}=1$，则 $[\![\sqrt{n}]\!]=1$，A 不正确；由 $|\sqrt{n}-[\![\sqrt{n}]\!]|<\dfrac{1}{2}$，即 $|\sqrt{n}-k|<\dfrac{1}{2}$，可得 $-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}-k<\dfrac{1}{2}$，故 $\sqrt{n}>k-\dfrac{1}{2}$ 成立，B 正确；由 B 分析知：$k-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\dfrac{1}{2}$，平方得：$k^2-k+\dfrac{1}{4}<n<k^2+k+\dfrac{1}{4}$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $k^2+k+\dfrac{1}{4}$ 不是整数，其中 k^2+k 是 $k^2+k+\dfrac{1}{4}$ 左侧的最接近的整数，所以 $n\leqslant k^2+k$ 成立，C 正确；当 $n=1$，2 时，$[\![\sqrt{n}]\!]=1$，此时 $a_1=a_2=1$；当 $n=3$，4，5，6 时，$[\![\sqrt{n}]\!]=2$，此时 $a_3=a_4=a_5=a_6=\dfrac{1}{2}$；当 $n=7$，8，9，10，11，12 时，$[\![\sqrt{n}]\!]=3$，此时 $a_7=a_8=\cdots=a_{12}=\dfrac{1}{3}$；当 $n=13$，14，$\cdots$，20 时，$[\![\sqrt{n}]\!]=4$，此时 $a_{13}=a_{14}=\cdots=a_{20}=\dfrac{1}{4},\cdots$，归纳得：数列 $\{a_n\}$ 中有 2 个 1，4 个 $\dfrac{1}{2}$，6 个 $\dfrac{1}{3}$，8 个 $\dfrac{1}{4}$，$\cdots$，又 2，4，6，8，$\cdots$ 构成首项为 2，公差为 2 的等差数列 $\{b_n\}$，其前 n 项和 $\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$，而 $2023=44\times(44+1)+43$，所以 $T_{2023}=1\times 2+\dfrac{1}{2}\times 4+\dfrac{1}{3}\times 6+\cdots+\dfrac{1}{44}\times 88+\dfrac{1}{45}\times 43=88+\dfrac{43}{45}$，D 正确，故选 BCD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$2\sqrt{2}$	$\dfrac{4(4^n-1)}{3}$	$\dfrac{512}{81}$	1

【解析】

13．设圆心为$C(1,0)$，经整理后，直线$m(x-2)+n(y-1)=0$过定点$P(2,1)$，因为弦长最短时，即直线与CP垂直时，此时弦长为$2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$．

14．公共项由小到大排列得到数列$\{a_n\}$：4，16，64，256，…，则数列$\{a_n\}$是等比数列，首项为$a_1=4$，公比为$q=4$，所以其前n项的和为$\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{4(4^n-1)}{3}$．

15．如图，设底面$ABCD$所在小圆的圆心为O_1，半径为r，易知O_1P垂直于小圆O_1所在平面时，体积最大，四边形$ABCD$内接于小圆O_1，当四边形$ABCD$是正方形时面积最大，所以四棱锥$P-ABCD$是正四棱锥时体积最大，设该正四棱锥的底面边长为a，高为h，$(h-R)^2+r^2=R^2=4$，$(h-2)^2+r^2=R^2=4$，$\therefore r^2=4h-h^2$，$\sqrt{2}a=2r$，$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}Sh$ $=\dfrac{1}{3}a^2h=\dfrac{2}{3}r^2h=\dfrac{2}{3}h^2(4-h)$，$V'=\dfrac{2}{3}(8h-3h^2)$，所以当$h=\dfrac{8}{3}$时，$V$取得最大值$\dfrac{512}{81}$．

16．设$|PF|=a,|QF|=b$，由余弦定理可得$|PQ|^2=|PF|^2+|QF|^2-2|PF||QF|\cos\angle PFQ$ $=a^2+b^2-ab$，由抛物线定义可得P到准线的距离为$|PF|$，Q到准线的距离为$|QF|$，由梯形的中位线定理可得M到准线$y=-1$的距离为$\dfrac{1}{2}(|PF|+|QF|)=\dfrac{1}{2}(a+b)$，则$d=\dfrac{1}{2}(a+b)-1$，$\dfrac{|PQ|^2}{(d+1)^2}=4\dfrac{a^2+b^2-ab}{(a+b)^2}=4\dfrac{(a+b)^2-3ab}{(a+b)^2}$，又$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，$\therefore\dfrac{|PQ|^2}{(d+1)^2}$ $\geqslant4\dfrac{(a+b)^2-\dfrac{3(a+b)^2}{4}}{(a+b)^2}=1$，当且仅当$a=b$时，等号成立，所以$\dfrac{|PQ|}{d+1}$的最小值为1．

四、解答题（共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分10分）

解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=10,\\ S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}d=-180,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=10,\\ d=-2,\end{cases}$

所以$S_n=-n^2+11n=-\left(n-\dfrac{11}{2}\right)^2+\dfrac{121}{4}$，当$n=5$或$6$时，$S_n$取得最大值，最大值为30．

…………………………………………………………………………（6分）

（2）因为$|a_n|=|12-2n|=\begin{cases}a_n,\ n\leqslant 6,\\ -a_n,\ n\geqslant 7,\end{cases}$

当$n\leqslant 6$时，$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-n^2+11n$；

当$n\geqslant 7$时，$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_6-(a_7+\cdots+a_n)=S_6-(S_n-S_6)=2S_6-S_n=n^2-11n+60$．

综上，$T_n=\begin{cases}-n^2+11n,\ n\leqslant 6,\\ n^2-11n+60,\ n\geqslant 7.\end{cases}$ $T_{30}=630$．…………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为$\angle POD=x\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$，

所以$QM=PN=\sqrt{6}\sin x$，则$OM=\dfrac{QM}{\tan\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}\sin x$，

又$ON=\sqrt{6}\cos x$，所以$MN=ON-OM=\sqrt{6}\cos x-\sqrt{2}\sin x$，…………………………（2 分）

所以$f(x)=MN\bullet PN=6\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x=3\sin 2x-\sqrt{3}(1-\cos 2x)$

$=3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$，…………………………（4 分）

$\because 0<x<\frac{\pi}{3}$，则$\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

故当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，即当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数$f(x)$取得最大值，$f(x)_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$．

……………………………………………………………………………………………………（6 分）

（2）$\because f(C)=2\sqrt{3}\sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又$C\in(0,\ \pi)$，

$\therefore 2C+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6}\right)$，$2C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$C=\frac{\pi}{6}$，……………………………………（8 分）

又$c=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$ab=8\sqrt{3}$，…………………………………………………（10 分）

$\therefore 4=a^2+b^2-\sqrt{3}ab=(a+b)^2-2ab-\sqrt{3}ab$，即$(a+b)^2=28+16\sqrt{3}$，

$\therefore a+b=4+2\sqrt{3}$，$\therefore a+b+c=6+2\sqrt{3}$，即$\triangle ABC$的周长为$6+2\sqrt{3}$．…………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：取 BC 中点 M，连接 AM，DM，如图 1 所示，

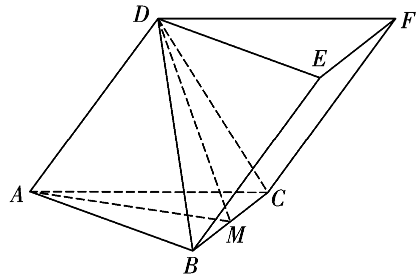

图 1

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，$\triangle DBC$ 为等腰三角形且以 BC 为底，

故 $AM\perp BC$，$DM\perp BC$（三线合一），

所以 $BC\perp$ 平面 ADM，$BC\perp AD$，

又 $AD // BE$，所以 $BC\perp BE$，

四边形 $BCFE$ 为矩形. ……………………………………（5 分）

（2）解：由 $BC\perp$ 平面 ADM，又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ADM\perp$ 平面 ABC，

故 AD 在平面 ABC 的射影在射线 AM 上，

$\angle DAM$ 为侧棱 AD 与底面 ABC 所成角，即 $\angle DAM=60^\circ$.

在 $\triangle DAM$ 中，$AM=\sqrt{3}$，$DM=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$，

由余弦定理知 $AD=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$，

故三棱锥 $D-ABC$ 为正三棱锥，高 $h=AD\sin 60^\circ=2$，即为点 D 到平面 ABC 的距离.

以 M 为坐标原点，MA，MB 为 x，y 轴建立如图 2 所示坐标系.

依题意，$A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ -1,\ 0)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 2\right)$，

$\overrightarrow{CB}=(0,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -1,\ 2\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，$E\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 1,\ 2\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 2\right)$，……………………（6 分）

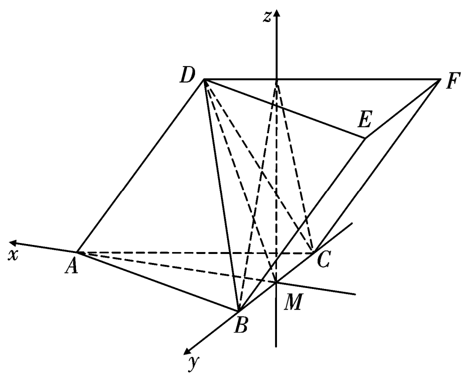

图 2

设平面 DBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(2\sqrt{3},\ 0,\ -1)$，……………………（8 分）

设平面 $EFBC$ 的法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 取 $\vec{m}=(\sqrt{3},\ 0,\ 1)$，……………………………………………………（10 分）

平面 DBC 与平面 $BCFE$ 夹角的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$．……………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）甲队在预赛和半决赛中均获胜的概率为：$P_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$，……………………（1 分）

乙队在预赛和半决赛中均获胜的概率为：$P_2=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$，……………………………（2 分）

丙队在预赛和半决赛中均获胜的概率为：$P_3=p\cdot\left(\dfrac{3}{2}-p\right)=-p^2+\dfrac{3}{2}p$，……………（3 分）

$\because\begin{cases}0<p<\dfrac{3}{4},\\ 0<\dfrac{3}{2}-p<1,\end{cases}$ $\therefore\dfrac{1}{2}<p<\dfrac{3}{4}$，$\therefore P_3=-\left(p-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{9}{16}<\dfrac{9}{16}<\dfrac{3}{5}$，

$\therefore$ 乙队进入决赛可能性最大．……………………………………………………………（4 分）

（2）$P=P_1\times P_2\times(1-P_3)+P_1\times P_3\times(1-P_2)+P_2\times P_3\times(1-P_1)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{5}\cdot P_3+\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\cdot P_3+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot(1-P_3)=\dfrac{37}{90}$，

解得 $P_3=\dfrac{5}{9}$，

$\therefore -p^2+\dfrac{3}{2}p=\dfrac{5}{9}$，解得 $p=\dfrac{2}{3}$ 或 $p=\dfrac{5}{6}$，

$\because\dfrac{1}{2}<p<\dfrac{3}{4}$，$\therefore p=\dfrac{2}{3}$．………………………………………………………（7 分）

（3）由题意可得，ξ 所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(\xi=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{30}{90}=\dfrac{1}{3}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{37}{90}$，

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$，……………………………………………………………（11 分）

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{1}{6}$

……………………………………………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知可得，$2a=2\sqrt{2}$，$b=1$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$．……………………………………………………（4 分）

（2）联立 $\begin{cases} y=\frac{x}{2}, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow P(2,1)$（P 在第一象限），

若①作为条件，证明②，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，直线 AB：$y=kx+m$，则 $Q\left(x_1, \frac{1}{2}x_1\right)$，$M(x_1, x_1-y_1)$，

则 $k_{PM}=\frac{x_1-y_1-1}{x_1-2}=1-\frac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_{PB}=\frac{y_2-1}{x_2-2}$，

因为 P，M，B 三点共线，故有 $k_{PM}=k_{PB}\Leftrightarrow\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=1$，………………………（6 分）

联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$，则 $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2-1}, \\ x_1\bullet x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}, \end{cases}$ ………（7 分）

由 $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=1\Rightarrow\frac{(kx_1+m-1)(x_2-2)+(kx_2+m-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=1$，

$2kx_1x_2-2k(x_1+x_2)+(m-1)(x_1+x_2)-4(m-1)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$，

$(2k-1)x_1x_2-2k(x_1+x_2)+(m+1)(x_1+x_2)-4m=0$，

代入韦达得 $\frac{(2m^2+2)(2k-1)+8k^2m-4km^2-4km-8k^2m+4m}{2k^2-1}=0$，

$2k-2km+2m-m^2-1=0\Rightarrow 2k(1-m)=(m-1)^2$，……………………………………（10 分）

若 $m-1\neq 0$，则 $m-1=-2k\Rightarrow m=1-2k$，

此时直线 AB：$y=k(x-2)+1$ 过点 $P(2,1)$，

与已知条件不符，故舍去，……………………………………………………………（11 分）

故只能是 $m=1$，即直线 AB 过定点 $T(0,1)$. ………………………………………（12 分）

若②作为条件，证明①，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$y=kx+1$，则 $Q\left(x_1,\dfrac{1}{2}x_1\right)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}\Rightarrow (2k^2-1)x^2+4kx+4=0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-4k}{2k^2-1},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4}{2k^2-1},\end{cases}$ …………………（5 分）

由 $k_{PB}=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$，$P(2,1)$ 得直线 PB：$y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)$，

令 $x=x_1$ 得点 $M\left(x_1,1+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x_1-2)\right)$，

要证 Q 是 AM 的中点，即证 $1+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}(x_1-2)+y_1=x_1\Leftrightarrow\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{x_1-y_1-1}{x_1-2}=1-\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，

……………………………………………………………………………………………（7 分）

$\dfrac{y_2-1}{x_2-2}+\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=1\Leftrightarrow\dfrac{kx_2}{x_2-2}+\dfrac{kx_1}{x_1-2}=1\Leftrightarrow 2kx_1x_2-2k(x_1+x_2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4$，

即证 $(2k-1)x_1x_2-(2k-2)(x_1+x_2)-4=0$，……………………………………………（9 分）

左边 $=\dfrac{(2k-1)\times 4+(2k-2)\cdot(4k)-8k^2+4}{2k^2-1}=0=$ 右边，

故 Q 是 AM 的中点. ……………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

（1）解：根据题意得：$\sin 2x+2\sin^2 x\geqslant 2ax$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，

即 $\sin 2x+(1-\cos 2x)\geqslant 2ax$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立.

令 $t=2x$，则 $t\in[0,\pi]$，问题化归为 $\sin t+1\geqslant at+\cos t$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立.

当 $t=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；

当 $t\in(0,\pi]$ 时，$a\leqslant\dfrac{\sin t-\cos t+1}{t}$，设 $g(t)=\dfrac{\sin t-\cos t+1}{t}$，

$g'(t)=\dfrac{(\cos t+\sin t)t-(\sin t-\cos t+1)}{t^2}=\dfrac{t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1}{t^2}$，

设 $h(t)=t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1$， $h'(t)=t(\cos t-\sin t)$，

则 $t\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$时， $h'(t)>0$， $h(t)$ 单调递增； $t\in\left(\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$时， $h'(t)<0$， $h(t)$ 单调递减.

而 $h(0)=0,\ h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0,\ h(\pi)<0$，

所以 $h(t)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$ 上存在唯一零点，设为 t_0， 则 $t\in(0,\ t_0)$ 时， $h(t)>0$， $g'(t)>0$；

$t\in(t_0,\ \pi]$ 时， $h(t)<0$， $g'(t)<0$，

所以 $g(t)$ 在 t_0 处取得最大值，在 $t=\pi$ 处取得最小值，

所以 $a\leqslant g(\pi)=\dfrac{2}{\pi}$，

综上所述：实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\ \dfrac{2}{\pi}\right]$. ……………………………………………（5 分）

（2）证明：由（1）知： $x\in[0,\ \pi]$ 时， $\sin x+1\geqslant\dfrac{2}{\pi}x+\cos x$， 所以 $\sin x-\cos x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x-1$，

所以 $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant\dfrac{2}{\pi}x-1$， 令 $s(x)=\sin x$,

即 $\sqrt{2}\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}+\dfrac{\pi}{4}\right)-1=\dfrac{2k}{2n+1}-\dfrac{1}{2}$， …………（8 分）

所以 $\sqrt{2}\left[s\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)+s\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+s\left(\dfrac{(n+1)\pi}{2n+1}\right)\right]\geqslant\left(\dfrac{2}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left[\dfrac{2(n+1)}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right]$

$=\dfrac{2}{2n+1}\bullet\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)}$，

所以 $s\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)+s\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+s\left(\dfrac{(n+1)\pi}{2n+1}\right)\geqslant\dfrac{3\sqrt{2}(n+1)}{4(2n+1)}$ ……………………………（10 分）

$=\dfrac{3\sqrt{2}(2n+2)}{8(2n+1)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)>\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. ………………………………………………（12 分）