

数 学

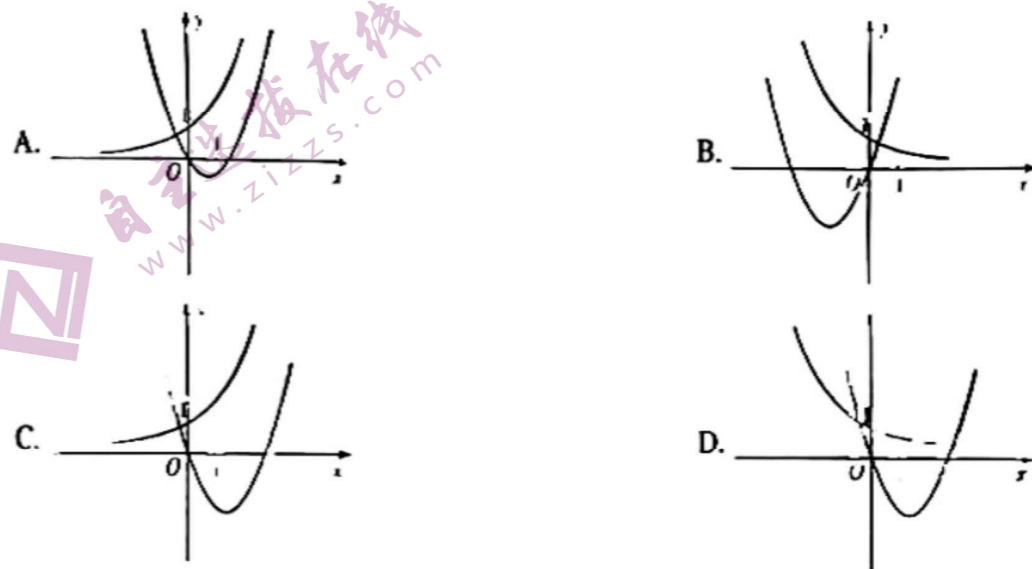
考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x < 3\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$   
 A.  $\{x | -1 \leq x < 2\}$     B.  $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$     C.  $\{x | 2 < x < 3\}$     D.  $\{x | 2 \leq x < 3\}$
2. 命题“ $\exists x \in (0, +\infty), \sin x = 1 + x$ ”的否定是  
 A.  $\forall x \in (0, +\infty), \sin x = 1 + x$     B.  $\forall x \in (0, +\infty), \sin x \neq 1 + x$   
 C.  $\exists x \in (0, +\infty), \sin x = 1 + x$     D.  $\exists x \in (0, +\infty), \sin x \neq 1 + x$
3. 为了得到函数  $y = \cos(3x - \frac{\pi}{3})$  的图象,只需将  $y = \sin 3x$  的图象  
 A. 向右平移  $\frac{\pi}{18}$  个单位长度    B. 向右平移  $\frac{5\pi}{18}$  个单位长度  
 C. 向左平移  $\frac{\pi}{18}$  个单位长度    D. 向左平移  $\frac{5\pi}{18}$  个单位长度
4. 若  $a > 0, b > 0$ , 且  $a + b = 4$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为  
 A.  $\frac{1}{4}$     B. 1    C. 2    D. 4
5. 函数  $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$  的单调递减区间是  
 A.  $(-\infty, -1)$     B.  $(-\infty, 1)$     C.  $(1, +\infty)$     D.  $(3, +\infty)$
6. 若  $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{1}{3}$ , 且  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\tan 2\alpha =$   
 A.  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$     B.  $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$     C.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$     D.  $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

7. 已知函数  $f(x) = a^x$  是指数函数, 函数  $g(x) = x^2 - 2ax$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  在同一坐标系中的图象可能为



8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$  的图象与直线  $y = k - x$  有 3 个不同的交点, 则实数  $k$  的取值范围是

- A.  $(-\frac{1}{4}, +\infty)$     B.  $(0, +\infty)$     C.  $(-\frac{1}{4}, 2]$     D.  $(0, 2]$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 下列判断正确的是  
 A. “ $x$  为偶数”是“ $x$  为整数”的充分条件  
 B. “ $a^2 > b^2$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件  
 C. “ $m > n > 0$ ”是“ $\ln 0.2^m < \ln 0.2^n$ ”的充分条件  
 D. “ $a = b$ ”是“ $a^3 - b^3 = e^b - e^a$ ”的充要条件
10. 已知角  $\alpha$  的顶点与坐标原点重合,始边与  $x$  轴的非负半轴重合,终边经过点  $(-\sqrt{2}, 4)$  则  
 A.  $\cos(-\alpha) = \frac{1}{3}$     B.  $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{3}$   
 C.  $\cos 2\alpha = -\frac{8}{9}$     D.  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = -2\sqrt{2}$
11. 已知函数  $f(x) = -2\sin^2 \omega x + \sin 2\omega x + 1$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 则  
 A.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{13\pi}{8}$  对称    B.  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$  上单调递增  
 C.  $f(x)$  在  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  内有 4 个零点    D.  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  上的值域为  $[-1, \sqrt{2}]$

12. 已知函数  $f(x) = \frac{ax^2 + a + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{x^2 + 1} + \frac{1}{a}$ , 其中  $a > 0$ , 若  $f(x)$  的最大值为  $M$ , 最小值为  $N$ , 则当  $a$  的值变化时

- A.  $M + N$  为定值  
 B.  $M - N$  为定值  
 C.  $M + N \geq 4$   
 D.  $M - N < \ln 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 2, \\ 2^{-x}, & x < 2, \end{cases}$  则  $f(\log_2 6) =$  \_\_\_\_\_

14. 已知函数  $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ , 若  $f(a) + f(a-4) = 0$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_

15. 已知函数  $f(x) = 2\sin(x - \varphi) + 4\sin x \cos \varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 的最大值是  $2\sqrt{3}$ , 则  $\varphi$  的最小值为 \_\_\_\_\_

16. 若当  $x \in [a, b]$  ( $a < b$ ) 时, 函数  $f(x)$  是单调函数, 且值域为  $[a, b]$ . 则称区间  $[a, b]$  为函数  $f(x)$  的

“域同区间”. 若函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + m$  存在域同区间, 则实数  $m$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$ .

- (I) 求  $\tan \alpha$  的值;  
 (II) 求  $\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$  的值.

18. (12 分)

已知 2 与 -1 是函数  $f(x) = x^3 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 的两个零点.

- (I) 求  $f(1)$  的值;  
 (II) 求不等式  $x(ax^2 - bx + 1) > 0$  的解集.

19. (12 分)

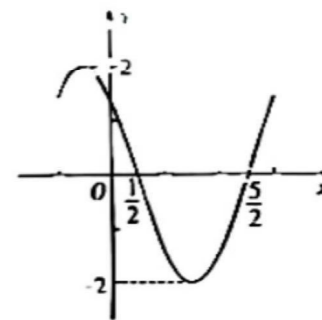
已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

- (I) 指出  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的单调性, 并根据单调性的定义证明;  
 (II) 设  $a = f(\sqrt{3})$ ,  $b = f\left(\log_2 \frac{1}{2}\right)$ ,  $c = f(\log_3 10)$ ,  $d = 2^{f(-1)}$ , 试比较  $a, b, c, d$  四个数的大小, 并说明理由.

20. (12 分)

已知函数  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图所示.

- (I) 求  $f(x)$  的解析式以及单调递增区间; 全科免费下载公众号-《高中僧课堂》  
 (II) 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{1}{4}$  个单位长度, 再将所得图象上所有点的横坐标伸长为原来的  $\frac{\pi}{2}$  倍, 纵坐标不变, 得到函数  $g(x)$  的图象, 若关于  $x$  的方程  $g(x) = a$  在  $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right]$  上有两个不等实根, 求实数  $a$  的取值范围.

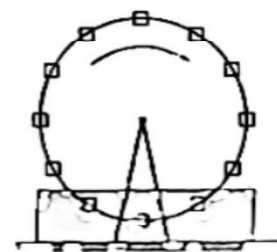


21. (12 分)

如图所示, 某游乐场的摩天轮最高点距离地面 85 m, 转轮的直径为 80 m, 摩天轮的一侧不远处有一排楼房 (阴影部分). 摩天轮开启后转轮顺时针匀速转动, 游客在座舱转到最低点时进入座舱, 转动  $t$  min 后距离地面的高度为  $H$  m, 转一周需要 40 min.

- (I) 求在转动一周的过程中,  $H$  关于  $t$  的函数  $H(t)$  的解析式;  
 (II) 游客甲进入座舱后观赏周围风景, 发现 10:14 时刚好可以看到楼房顶部, 到 10:42 时水平视线刚好再次被楼房遮挡, 求甲进入座舱的时刻并估计楼房的高度.

参考数据:  $\sin \frac{3\pi}{10} \approx \frac{4}{5}$



22. (12 分)

已知函数  $f(x)$  对于任意实数  $x, y$  恒有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 且当  $x < 0$  时  $f(x) < 0$ ,  $f(1) = 3$ .

- (I) 求  $f(x)$  在区间  $[-4, 2]$  上的最大值和最小值;  
 (II) 若在区间  $[1, 3]$  上不存在实数  $x$ , 满足  $f(x^2) > f(ax) - 3$ , 求实数  $a$  的取值范围.