高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=-2-3\mathrm{i}$，则 $(\overline{z}+1)\mathrm{i}=$

A. $3-\mathrm{i}$　　B. $-3-\mathrm{i}$　　C. $3+\mathrm{i}$　　D. $-3+\mathrm{i}$

2. 已知集合 $M=\{x|x^2+3x<0\}$，$N=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $M\cup N=$

A. $\{x|-3<x<-2\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x<0\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|-3<x\leqslant 3\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=$

A. $(0,5)$　　B. $(5,1)$　　C. $(1,-5)$　　D. $\left(\frac{15}{2},-5\right)$

4. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $ab^2>b^3$，则下列不等式一定成立的是

A. $\log_{\frac{1}{2}}a>\log_{\frac{1}{2}}b$　　B. $a^2>b^2$　　C. $2^a>2^b$　　D. $\ln(a-b)>0$

5. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_3=11$，$S_{10}=60$，则 $a_5=$

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

6. 已知一个容量为 $n(n\geqslant 10)$ 的样本数据的平均值为 90，方差为 10，若去掉其中 5 个为 90 的样本数据，剩余样本数据的平均值为 $\overline{x}$，方差为 s^2，则下列结论正确的是

A. $\overline{x}=90,s^2>10$　　B. $\overline{x}=90,s^2=10$　　C. $\overline{x}>90,s^2=10$　　D. $\overline{x}=90,s^2<10$

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线过点 $P(-1,\sqrt{3})$，F 是 C 的左焦点，且 $|PF|=2$，则双曲线 C 的方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

8. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$ 的极值为 $-\frac{1}{2}$，则 $a=$

A. e　　B. $\frac{1}{2}$e　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

9. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin 2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{7}{10}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

10. 若函数 $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^3+\frac{2}{e^x+1}-m\right)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，则 $m=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

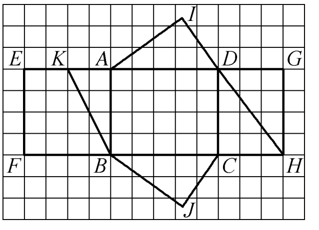
11. 某三棱柱的平面展开图如图所示，网格中的小正方形的边长均为 1，则在原三棱柱中，异面直线 BK 和 DH 所成角的余弦值为

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{25}$

D. $\frac{8\sqrt{5}}{25}$



12. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线 $x=-1$ 与 x 轴交于点 A，F 为 C 的焦点，B 是 C 上第一象限内的点，则 $\frac{|AB|}{|BF|}$ 取得最大值时，$\triangle ABF$ 的面积为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y+5\geqslant 0,\\2x+5y+10\leqslant 0,\\x-2y-4\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值为________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5=\frac{3}{16}$，$a_n+2a_{n+1}=0$，则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和 $S_6=$________.

15. 已知圆锥的底面半径为 $2\sqrt{2}$，侧面积为 $8\sqrt{3}\pi$，则该圆锥的外接球的表面积为________.

16. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 满足下列条件：

①$f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=0$；②$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{12})$ 与 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3})$ 上具有相反的单调性；③ $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$f(x_1)f(x_2)\leqslant 4$，并且等号能取到. 则 $f(\frac{5}{36}\pi)=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2a\cos B\sin C+c\sin A=0$.

（1）求 B；

（2）若△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，角 B 的平分线交 AC 于 D，且 $BD=\frac{4}{5}$，求 b.

18.（12 分）

某电器公司的市场调研人员为了改进和评价市场营销方案，对该公司某种产品最近五个月内的市场占有率进行了统计，结果如表所示：

年份	2021 年				
月份	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
月份代码 x	1	2	3	4	5
市场占有率 y(%)	8	10	13	20	24

（1）从上述五个月份中随机抽取两个月，求该种产品市场占有率均超过 10%的概率；

（2）求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测何时该种产品的市场占有率超过 35%.

参考公式：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为

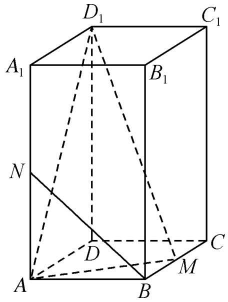
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$$

19.（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形，$\angle ADC=120°$，$BB_1=2AB=4$，M，N 分别为 BC，AA_1 的中点.

（1）证明：BN∥平面 AMD_1；

（2）平面 AMD_1 将该直四棱柱分成两部分，记这两部分中较大的体积为 V_1，较小的体积为 V_2，求$\frac{V_1}{V_2}$的值.



20.(12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 $F_1,F_2,P(-1,\frac{3}{2})$是 E 上一点,且 PF_1 与 x 轴垂直.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)设过点 F_2 的直线 l 与 E 交于 A、B 两点,点 $M(0,1)$,且$\triangle MAF_2$ 的面积是$\triangle MBF_2$ 面积的 2 倍,求直线 l 的方程.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=(a-2)x-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=3$ 时,求 $f(x)$的最小值;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+ax^2$ 有两个不同的零点,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-3-4t,\\y=2+3t\end{cases}$($t$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-10\rho\sin\theta+5=0$.

(1)求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若射线 $\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$与直线 l 垂直,且与曲线 C 交于 A,B 两点,求$\left|\frac{1}{|OA|}-\frac{1}{|OB|}\right|$的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$.

(1)求 abc 的最大值;

(2)证明:$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant 3abc$.

高三文科数学
参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意可知，$\overline{z}=-2+3\mathrm{i}$，所以$(\overline{z}+1)\mathrm{i}=(-1+3\mathrm{i})\mathrm{i}=-3-\mathrm{i}$.

2. D　因为 $M=\{x|x^2+3x<0\}=\{x|-3<x<0\}$，$N=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $M\cup N=\{x|-3<x\leqslant 3\}$.

3. C　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $3m-2=0$，解得 $m=\dfrac{2}{3}$，所以 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(3,-2)-3\left(\dfrac{2}{3},1\right)=(1,-5)$.

4. C　由条件可知 $b^2>0$，所以 $a>b$，则 A 不正确；若 $a=1$，$b=-2$，则 B 不正确；由指数函数 $y=2^x$ 的单调性可知，$2^a>2^b$，则 C 正确；若 $a=2$，$b=1$，则 $\ln(a-b)=0$，则 D 不正确.

5. A　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题意可知，$\begin{cases}a_1+2d=11,\\10a_1+45d=60,\end{cases}$ 解得 $a_1=15$，$d=-2$，所以 $a_5=a_1+4d=15-8=7$.

6. A　由题意可知，$n(n\geqslant 10)$ 个样本数据之和为 $90n$，去掉 5 个相同的样本数据 90 后，$(n-5)$ 个样本数据之和为 $90(n-5)$，所以$\overline{x}=\dfrac{90(n-5)}{n-5}=90$，排除选项 C；因为样本数据中有 5 个相同的数据 90，且 $5(90-90)^2=0$，不妨设去掉的 5 个相同的样本数据 90 都排在最后，

则$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-90)^2=\sum_{i=1}^{n-5}(x_i-90)^2$，所以$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-90)^2<\frac{1}{n-5}\sum_{i=1}^{n-5}(x_i-90)^2$，即 $s^2>10$.

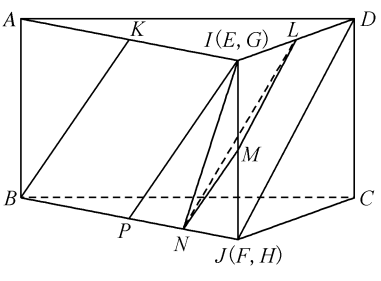
7. A　由题意可知，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，点 $P(-1,\sqrt{3})$在一条渐近线上，所以$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}a$，且两条渐近线的倾斜角分别为 $60°$，$120°$，又$|PF|=2$，$|OP|=2$（O 为坐标原点），所以$\triangle OFP$ 为等边三角形，从而 $c=2$. 由 $a^2+b^2=c^2$，$b=\sqrt{3}a$，解得 $a^2=1$，$b^2=3$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

8. C　函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax=\dfrac{1-2ax^2}{x}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)$无极值，不符合题意；当 $a>0$ 时，$f'(x)=-\dfrac{2a\left(x^2-\dfrac{1}{2a}\right)}{x}$，当 $x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，则 $f(x)_{极大值}=f\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)=-\dfrac{1}{2}\ln(2a)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

9. B　由条件可知$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{7}{10}$，整理得$\dfrac{2\tan\alpha+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{7}{10}$，所以 $3\tan^2\alpha+20\tan\alpha-7=0$，解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，或 $\tan\alpha=-7$（舍去），所以 $\cos 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$.

10. C　因为 $f(x)$是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，函数 $y=\dfrac{1}{x}$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数，所以 $g(x)=x^3+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}-m$ 是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数，则 $g(-x)=-g(x)$，即$-x^3+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x}+1}-m=-\left(x^3+\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}-m\right)$，整理得 $2m=\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x}+1}=\dfrac{2(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}=2$，所以 $m=1$.

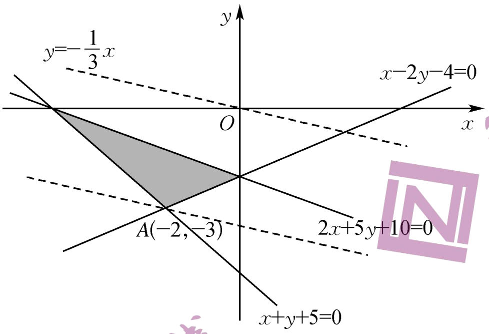
11. D　将平面展开图折成立体图形如图所示，则 $DI=3$，$AI=4$，$AD=5$，显然 $DI^2+AI^2=AD^2$，所以 $DI\perp AI$，又 $DI\perp IJ$，$AI\cap IJ=I$，所以 $DI\perp$平面 $AIJB$. 分别取 DI，IJ，BJ 的中点 L，M，P，取 PJ 的中点 N，连接 LM，MN，LN，IN，IP，则 $LM\mathbin{/\!/}DJ$，$MN\mathbin{/\!/}IP\mathbin{/\!/}BK$，所以$\angle LMN$ 即为直线 BK 和 DH 所成的角（或补角），又 $LM=\dfrac{1}{2}DJ=\dfrac{1}{2}\sqrt{DC^2+CJ^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+3^2}=\dfrac{5}{2}$，$MN=\sqrt{MJ^2+JN^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$LN=\sqrt{LI^2+IN^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+4^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{77}}{2}$，所以在$\triangle LMN$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle LMN=\dfrac{LM^2+MN^2-LN^2}{2LM\cdot MN}=-\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$，所以直线 BK 和 DH 所成角的余弦值为$\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.



12. A　由题意可知，$-\dfrac{p}{2}=-1$，所以 $p=2$，则 $y^2=4x$，$A(-1,0)$，$F(1,0)$. 过点 B 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 D，由抛物线的定义可知，$\dfrac{|AB|}{|BF|}=\dfrac{|AB|}{|BD|}=\dfrac{1}{\sin\angle BAD}$，要使$\dfrac{|AB|}{|BF|}$取得最大值，则 $\sin\angle BAD$ 取得最小值，需直线 AB 与 C 相

切.设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$,由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y 可得,$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$,所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$,解得 $k=\pm1$,因为 B 是 C 上第一象限内的点,所以 $k=1$,$B(1,2)$,所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

13. -11　可行域如图所示,作出直线 $y=-\frac{1}{3}x$,并平移,当直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z$ 经过 A 时,z 取得最小值.由 $\begin{cases}x+y+5=0,\\x-2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $A(-2,-3)$,$z_{\min}=-2+3\times(-3)=-11$.



14. $\frac{63}{32}$　由 $a_n+2a_{n+1}=0$,$a_5\neq0$,得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$,所以 $\{a_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,又由 $a_5=\frac{3}{16}$,得 $a_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$,所以 $a_1=3$,故 $S_6=\frac{3\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{63}{32}$.

15. 36π　设圆锥的母线长为 a,则侧面积为 $2\sqrt{2}\pi\times a=8\sqrt{3}\pi$,解得 $a=2\sqrt{6}$,故圆锥的高为 $\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{2})^2}=4$,设该圆锥的外接球的半径为 R,由球的性质知,$R^2=(2\sqrt{2})^2+(4-R)^2$,解得 $R=3$,故外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=36\pi$.

16. $\sqrt{3}$　由 $f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=0$ 可知,$f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称;由 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{12})$ 与 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3})$ 上具有相反的单调性可知,直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴;又 $\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3})$,所以 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$,所以 $T=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\omega=3$,所以 $f(x)=A\cos(3x+\varphi)$,由五点作图法,得 $3\times\frac{\pi}{12}+\varphi=0$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.(或:由 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称,得 $\cos(\frac{3\pi}{4}+\varphi)=0$,易求得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$).由 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,$-A\leqslant f(x_1)\leqslant A$,$-A\leqslant f(x_2)\leqslant A$ 可知,$f(x_1)f(x_2)\leqslant A^2$,又因为 $f(x_1)f(x_2)\leqslant4$,且等号都能取到,所以 $A^2=4$,则 $A=2$,故 $f(x)=2\cos(3x-\frac{\pi}{4})$,$f(\frac{5}{36}\pi)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

17. 解:(1)由正弦定理及 $2a\cos B\sin C+c\sin A=0$,得 $2ac\cos B+ac=0$, ………… 3 分

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$. ………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{2}{3}\pi$. ………… 5 分

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$,

所以 $\frac{1}{2}BD\cdot c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}BD\cdot a\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,即 $a+c=5$. ………… 8 分

又 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$,所以 $ac=4$. ………… 10 分

易知方程组 $\begin{cases}a+c=5,\\ac=4\end{cases}$ 有解且 a,c 均大于 0,

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}=(a+c)^2-ac=21$,

所以 $b=\sqrt{21}$. ………… 12 分

18. 解:(1)从代码为 1,2,3,4,5 的五个月份中随机抽取两个月份代码,有(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)共 10 种不同的可能, ………… 3 分

其中占有率超过 10%的有(3,4),(3,5),(4,5)共 3 种, ………… 4 分

所以该种产品市场占有率均超过 10%的概率 $P=\frac{3}{10}$. ………… 6 分

(2) 根据题中数据可得$\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$,$\overline{y}=\frac{1}{5}(8+10+13+20+24)=15$,

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=42$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$,

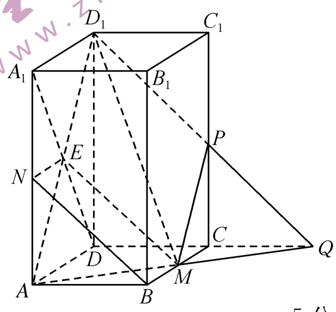
所以$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{42}{10}=4.2$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=15-4.2\times3=2.4$. …………………………… 9分

故 y 关于 x 的线性回归方程是$\hat{y}=4.2x+2.4$. …………………………………………………… 10分

令$\hat{y}>35$,即$4.2x+2.4>35$,解得$x>\frac{163}{21}$,又$x\in\mathbf{N}$,所以$x\geqslant8$,

估计到2022年3月,该种产品的市场占有率超过35%. …………………………………………………… 12分

19.(1)证明:连接A_1D,交AD_1于点E,连接NE,ME,



因为N,E分别为AA_1,A_1D的中点,所以$NE/\!/AD$,且$NE=\frac{1}{2}AD$, ………… 1分

因为M为BC的中点,所以$BM/\!/AD$,且$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$, ………………… 2分

所以$NE/\!/BM$,且$NE=BM$,

所以四边形$BNEM$为平行四边形,

所以$BN/\!/ME$, ………………………………………………………………………… 3分

因为$BN\not\subset$平面AMD_1,$ME\subset$平面AMD_1,

故$BN/\!/$平面AMD_1. …………………………………………………………………………………………… 5分

(2)解:延长DC,AM交于点Q,则C,M分别为DQ,AQ的中点,$DQ=4$,$CQ=2$,

再连接D_1Q,交CC_1于点P,则P为CC_1的中点,$PC=2$,连接MP,

所以平面AMD_1将该直四棱柱分成两部分中体积较小的部分为三棱台ADD_1-MCP. …………… 6分

因为三棱台ADD_1-MCP的体积等于三棱锥D_1-ADQ的体积减去三棱锥$P-MCQ$的体积,

所以$V_2=V_{三棱台ADD_1-MCP}=V_{三棱锥D_1-ADQ}-V_{三棱锥P-MCQ}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AD\times DQ\sin120^\circ\times DD_1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}MC\times CQ\sin120^\circ\times PC=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. ………………… 8分

又直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为$V_{直四棱柱ABCD-A_1B_1C_1D_1}=AB\times AD\sin120^\circ\times DD_1=8\sqrt{3}$, 10分

所以$V_1=V_{直四棱柱ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_2=8\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{17\sqrt{3}}{3}$, ………………………………… 11分

故$\frac{V_1}{V_2}=\frac{17}{7}$. ……………………………………………………………………………………………… 12分

20.解:(1)由题意,得$F_2(1,0)$,$F_1(-1,0)$,且$c=1$, ………………………………………………… 1分

则$2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}+\frac{3}{2}=4$,即$a=2$, ……………………………… 2分

所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$, …………………………………………………………………………………… 3分

故E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………………………… 4分

(2)由题意,得$|AF_2|>|BF_2|$,当l与x轴重合时,$|AF_2|=3$,$|BF_2|=1$,从而$\triangle MAF_2$面积是$\triangle MBF_2$面积的3倍,

此时不适合题意. ……………………………………………………………………………………………… 5分

当l与x轴不重合时,设直线l的方程为$x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$. ………………………… 6分

由$\begin{cases}x=ty+1,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$, ………………………………………………… 7分

由题意,得$\triangle>0$,且$y_1+y_2=-\frac{6t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$, ……………………………………… 8分

由$\triangle MAF_2$的面积是$\triangle MBF_2$面积的2倍,得$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$,所以$y_1=-2y_2$, ……………………… 9分

所以$-y_2=-\frac{6t}{3t^2+4}$,$-2y_2^2=-\frac{9}{3t^2+4}$,即$2\left(\frac{6t}{3t^2+4}\right)^2=\frac{9}{3t^2+4}$,

解得$t^2=\frac{4}{5}$, ……………………………………………………………………………………………… 11分

所以直线l的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$. ……………………………………………………………… 12分

21.解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$a=3$时,$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, ………………………………… 2分

当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增. ………………………………………… 4分

所以 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值点,也是 $f(x)$的最小值点,

故 $f(x)_{\min}=f(1)=1$. ………………………………………………………… 5分

(2)由 $g(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$,得 $g'(x)=2ax+a-2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}$,…. 6分

当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

则 $g(x)$最多有一个零点,不合题意; ………………………………………………… 7分

当 $a>0$ 时,当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$时,$g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递减,在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增,

则 $g(x)$的极小值为 $g(\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{a}+(a-2)\cdot\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a}-\ln\dfrac{1}{a}+1$. ………………… 8分

设 $t=\dfrac{1}{a}>0$,则 $h(t)=-t-\ln t+1$,

所以 $h'(t)=-1-\dfrac{1}{t}<0$,从而 $h(t)$在$(0,+\infty)$上单调递减,又 $h(1)=0$.

当 $0<t\leqslant 1$,即 $a\geqslant 1$ 时,$h(t)\geqslant 0$;

所以当 $a\geqslant 1$ 时,$g(x)$最多有一个零点,不合题意; ………………………………… 9分

当 $t>1$,即 $0<a<1$ 时,$h(t)<0$,即 $g(\dfrac{1}{a})<0$;

又 $g(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}+(a-2)\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}=a(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{e}})-\dfrac{2}{\mathrm{e}}+1>0$,

则 $g(\dfrac{1}{a})\cdot g(\dfrac{1}{\mathrm{e}})<0$,所以 $g(x)$在$(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{a})$内有一个零点. ………………………… 10分

由(1),得 $x-\ln x\geqslant 1$,所以 $g(\dfrac{3}{a})=\dfrac{9}{a}+(a-2)\cdot\dfrac{3}{a}-\ln\dfrac{3}{a}=\dfrac{3}{a}-\ln\dfrac{3}{a}+3\geqslant 1+3>0$,

所以 $g(x)$在$(\dfrac{1}{a},\dfrac{3}{a})$内有一个零点, ……………………………………………… 11分

结合 $g(x)$的单调性,可知 $0<a<1$ 时,$g(x)$有两个不同的零点,

故 a 的取值范围为$(0,1)$. ……………………………………………………………… 12分

22. 解:(1)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-3-4t,\\y=2+3t\end{cases}$($t$ 为参数),消去参数 t,得直线 l 的普通方程为 $3x+4y+1=0$. ……… 2分

将 $\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\sin\theta=y$ 代入 $\rho^2-10\rho\sin\theta+5=0$,得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-10y+5=0$. ……… 5分

(2)因为射线 $\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$与直线 l:$3x+4y+1=0$ 垂直,

所以 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$,$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. …………………………………………………………… 6分

将 $\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-8\rho+5=0$,

设 A、B 所对应的极径分别为 ρ_A,ρ_B,则 $\Delta=8^2-4\times5=44>0$,$\rho_A+\rho_B=8$,$\rho_A\rho_B=5$,易知 ρ_A,ρ_B 均大于 0,

所以 $\left|\dfrac{1}{|OA|}-\dfrac{1}{|OB|}\right|=\left|\dfrac{1}{\rho_A}-\dfrac{1}{\rho_B}\right|=\dfrac{|\rho_B-\rho_A|}{|\rho_A\rho_B|}=\dfrac{1}{5}\sqrt{(\rho_B+\rho_A)^2-4\rho_A\rho_B}=\dfrac{2\sqrt{11}}{5}$. ……………… 10分

23. (1)解:由 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,当且仅当 $a=b=c$ 时,取得等号. ……………………… 2分

又 $a+b+c=3$,所以 $abc\leqslant\left(\dfrac{3}{3}\right)^3=1$.

故当且仅当 $a=b=c=1$ 时,abc 取得最大值 1. ………………………………………… 5分

(2)证明:要证 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant 3abc$,需证 $\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}\geqslant 3$. ……………………………… 6分

因为$\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+(a+b+c)=(\dfrac{a^2}{c}+c)+(\dfrac{b^2}{a}+a)+(\dfrac{c^2}{b}+b)$

$\geqslant 2\sqrt{a^2}+2\sqrt{b^2}+2\sqrt{c^2}=2(a+b+c)=6$,即$\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}\geqslant 3$,当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得等号.

故 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant 3abc$. ……………………………………………………………… 10分