绝密★启用前

天一大联考

"顶尖计划"2020届高中毕业班第二次考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

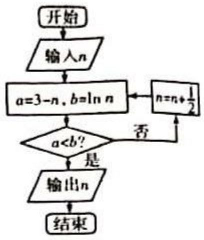
1. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-3}{x-1}\leq 0\right.\right\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=$

A. $(1,2)$　　B. $[1,2)$　　C. $(-2,1]$　　D. $(-2,1)$

2. 设i为虚数单位，z 为复数，若 $\frac{|z|}{z}+\mathrm{i}$ 为实数 m，则 $m=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 执行如图所示的程序框图，若输入 $n=\frac{1}{2}$，则输出的 n 的值为



A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

4. 一个陶瓷圆盘的半径为10 cm，中间有一个边长为4 cm的正方形花纹，向盘中投入1 000粒米后，发现落在正方形花纹上的米共有51粒，据此估计圆周率 π 的值为（精确到0.001）

A. 3.132　　B. 3.137　　C. 3.142　　D. 3.147

5. 将3个黑球、3个白球和1个红球排成一排，各小球除了颜色以外其他属性均相同，则相同颜色的小球不相邻的排法共有

A. 14种　　B. 15种　　C. 16种　　D. 18种

6. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为2，且球心为线段 BC 的中点，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

7. 已知 AM，BN 分别为圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=1$ 与 $O_2:(x-2)^2+y^2=4$ 的直径，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的取值范围为

A. $[0,8]$　　B. $[0,9]$　　C. $[1,8]$　　D. $[1,9]$

8. 如图所示的“数字塔”有以下规律：每一层最左与最右的数字均为2，除此之外每个数字均为其两肩的数字之积，则该“数字塔”前10层的所有数字之积最接近($\lg 2\approx 0.3$)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \\ & & 2 & & 4 & & 2 & & \\ & 2 & & 8 & & 8 & & 2 & \\ 2 & & 16 & & 64 & & 16 & & 2 \\ & & & & \cdots\cdots & & & & \end{array}$$

A. 10^{300}　　B. 10^{400}　　C. 10^{500}　　D. 10^{600}

9. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A，与准线在第三象限交于点 B，过点 A 作准线的垂线，垂足为 H. 若 $\tan\angle AFH=2$，则 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=$

A. $\dfrac{5}{4}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作一条直线与双曲线右支交于 A，B 两点，坐标原点为 O，若 $|OA|^2=a^2+b^2$，$|BF_1|=5a$，则该双曲线的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

11. 记 n 个两两无交集的区间的并集为 n 阶区间，如 $(-\infty,1]\cup[2,3]$ 为2阶区间. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x|}$，则不等式 $f[f(x)]+3\leqslant 0$ 的解集为

A. 2阶区间　　B. 3阶区间　　C. 4阶区间　　D. 5阶区间

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，球 O_1 同时与以 A 为公共顶点的三个面相切，球 O_2 同时与以 C_1 为公共顶点的三个面相切，且两球相切于点 F. 若以 F 为焦点，AB_1 为准线的抛物线经过 O_1,O_2，设球 O_1,O_2 的半径分别为 r_1,r_2，则 $\dfrac{r_1}{r_2}=$

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　C. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $2-\sqrt{3}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 $f(x)=e^x+e^{ax}$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的最小值为________.

14. 在直角坐标系中，某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为 $(1,1)$，$(2,2)$，函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,0<\omega<\dfrac{\pi}{2},|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过该三角形的三个顶点，则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________.

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足递推公式 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，且 $a_1=a_2$，$a_{2019}\cdot a_{2020}=2020$，则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2019}^2=$________.

16. 若存在实数 k,b 使得不等式 $f(x)\leqslant kx+b\leqslant g(x)$ 在某区间上恒成立，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为该区间上的一对“分离函数”，下列各组函数中是对应区间上的“分离函数”的有________.（填上所有正确答案的序号）

①$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\tan x$；

②$x\in[1,+\infty)$，$f(x)=\sqrt{x^2-1}$，$g(x)=\sqrt{x^2+1}$；

③$x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2+2$，$g(x)=e^x+e^{-x}$；

④$x\in(0,+\infty)$，$f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=2x\ln x$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

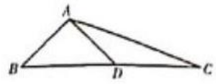
(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

如图，在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $a\sin B+b\cos A=c$，线段 BC 的中点为 D.

(Ⅰ)求角 B 的大小；

(Ⅱ)已知 $\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求∠$ADB$ 的大小.

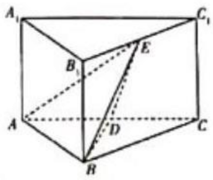


18. (12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1=1$，$AC=\sqrt{3}$，点 D,E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.

(Ⅰ)棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 PBD⊥平面 ABE? 若存在，写出 PA 的长并证明你的结论；若不存在，请说明理由.

(Ⅱ)求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.



19. (12 分)

某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律，据统计该地区蜻蜓有 A,B 两种，且这两种的个体数量大致相等. 记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长(单位：mm)分别为随机变量 X,Y，其中 X 服从正态分布 $N(45,25)$，Y 服从正态分布 $N(55,25)$.

(Ⅰ)从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只，求这只蜻蜓的翼长在区间[45,55]的概率；

(Ⅱ)记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z，若用正态分布 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$ 来近似描述 Z 的分布，请你根据(Ⅰ)中的结果，求参数 μ_0 和 σ_0 的值(精确到 0.1)；

(Ⅲ)在(Ⅱ)的条件下，从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只，记这 3 只中翼长在区间[42.2,57.8]的个数为 W，求 W 的分布列及数学期望(分布列写出计算表达式即可).

注：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-0.64\sigma\leqslant X\leqslant\mu+0.64\sigma)\approx0.4773$，$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9546$.

20.(12分)

已知圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=8$ 上有一动点 Q，点 O_2 的坐标为 $(1,0)$，四边形 QO_1O_2R 为平行四边形，线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P.

（Ⅰ）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（Ⅱ）过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A,B 两点，点 K 的坐标为 $(2,1)$，直线 KA,KB 与 y 轴分别交于 M,N 两点，求证：线段 MN 的中点为定点，并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值.

21.(12分)

已知 $a>0$，函数 $f(x)=x\ln x+\frac{x^2}{2}-a(x-1)$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $a\in\mathbf{Z}$，$f(x)>0$ 恒成立，求 a 的最大值.

（参考数据：$e^{\frac{1}{2}}\approx1.6$）

(二)选考题：共10分. 请考生在第22,23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\varphi,\\y=t\sin\varphi\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\\y=t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=\cos\theta$.

（Ⅰ）求 l_1,l_2 的极坐标方程和 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点（与原点 O 不重合），求 $|OA|\cdot|OB|$ 的最小值.

23.[选修4-5：不等式选讲](10分)

已知 $f(x)=|x-a|+|x+b|(a>0,b>0)$.

（Ⅰ）当 $a=b=1$ 时，解不等式 $f(x)\le8-x^2$；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的最小值为1，求 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2b}$ 的最小值.

天一大联考
“顶尖计划”2020届高中毕业班第二次考试
理科数学·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

1. C	2. B	3. C	4. B	5. D	6. C
7. A	8. A	9. C	10. B	11. D	12. D

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 2

14. $2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$

15. 2 020

16. ①②④

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】 本题考查正弦定理和余弦定理的综合运用.

【解析】 (Ⅰ)由正弦定理得 $\sin A\sin B+\sin B\cos A=\sin C$. ……(2分)

而 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$. ……(3分)

由以上两式得 $\sin A\sin B=\sin A\cos B$,即 $\sin A(\sin B-\cos B)=0$.

由于 $\sin A>0$,所以 $\sin B=\cos B$, ……(5分)

又由于 $B\in(0,\pi)$,得 $B=\frac{\pi}{4}$. ……(6分)

(Ⅱ)设 $c=1$,在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理有 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\sqrt{5}$. ……(8分)

由余弦定理有 $a^2+c^2-2ac\cos B=b^2$,整理得 $(a-2\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$,

由于 $a>0$,所以 $a=2\sqrt{2}$,$BD=\frac{a}{2}=\sqrt{2}$. ……(10分)

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理有 $AD=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=1$. ……(11分)

所以 $AB^2+AD^2=BD^2$,所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$,$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$. ……(12分)

18.【命题意图】 本题考查面面垂直的判定定理、向量法求二面角的余弦值.

【解析】 (Ⅰ)存在点 P 满足题意,且 $PA=\frac{3}{4}$. ……(1分)

证明如下:

取 A_1C_1 的中点为 F,连接 EF,AF,DF.

则 $EF/\!/A_1B_1/\!/AB$,所以 $AF\subset$ 平面 ABE. ……(2分)

因为 $AB=BC$,D 是 AC 的中点,所以 $BD\perp AC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1,且交线为 AC,

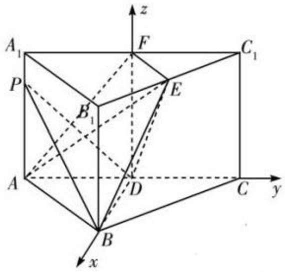
所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1,所以 $BD\perp AF$. ……(3分)

在平面 ACC_1 内,$\frac{AP}{AD}=\frac{AD}{DF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\angle PAD=\angle ADF=90°$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle PAD\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADF$,从而可得 $AF\perp PD$. ……(4分)

又因为 $PD\cap BD=D$,所以 $AF\perp$ 平面 PBD. ……(5分)

因为 $AF\subset$ 平面 ABE，所以平面 $PBD\perp$ 平面 ABE. ……………………………………………………………… (6 分)



(Ⅱ)如图所示，以 D 为坐标原点，以 DB,DC,DF 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

易知 $D(0,0,0)$，$B\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$， ……………………………………………… (7 分)

所以 $\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0.\end{cases}$$ 取 $y=2$，得 $\boldsymbol{m}=(-2\sqrt{3},2,-\sqrt{3})$. ………………………………… (9 分)

同理可求得平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,4,-\sqrt{3})$. ……………………………………………… (10 分)

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{8+3}{\sqrt{12+4+3}\cdot\sqrt{16+3}}=\frac{11}{19}$.

由图可知二面角 $A-BE-D$ 为锐角，所以其余弦值为 $\frac{11}{19}$. ……………………………………………… (12 分)

19.【命题意图】 本题考查正态分布、二项分布.

【解析】 (Ⅰ)记这只蜻蜓的翼长为 t.

因为 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的个体数量大致相等，所以这只蜻蜓是 A 种还是 B 种的可能性是相等的.

…… (2 分)

所以 $P(45\leqslant t\leqslant 55)=\frac{1}{2}\times P(45\leqslant X\leqslant 55)+\frac{1}{2}\times P(45\leqslant Y\leqslant 55)$ ………………………………… (3 分)

$=\frac{1}{2}\times P(45\leqslant X\leqslant 45+2\times 5)+\frac{1}{2}\times P(55-2\times 5\leqslant Y\leqslant 55)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{0.9546}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{0.9546}{2}=0.4773$. ………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由于两种蜻蜓的个体数量相等，X,Y 的方差也相等，根据正态曲线的对称性，可知 $\mu_0=\frac{45+55}{2}=50.0$.

…… (7 分)

由(Ⅰ)可知 $45=\mu_0-0.64\sigma_0$，$55=\mu_0+0.64\sigma_0$，得 $\sigma_0=\frac{5}{0.64}\approx 7.8$. ………………………………… (9 分)

(Ⅲ)设蜻蜓的翼长为 T，则 $P(42.2\leqslant T\leqslant 57.8)=P(\mu-\sigma\leqslant T\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$. ……………………… (10 分)

由题有 $W\sim B(3,0.6827)$，所以 $P(W=k)=C_3^k\times 0.6827^k\times 0.3173^{3-k}$. ………………………………… (11 分)

因此 W 的分布列为

W	0	1	2	3
P	$C_3^0 0.3173^3$	$C_3^1 0.6827^1\cdot 0.3173^2$	$C_3^2 0.6827^2\cdot 0.3173^1$	$C_3^3 0.6827^3$

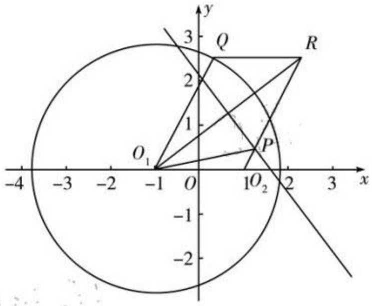
$E(W)=3\times 0.6827=2.0481$. …………………………………………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】 本题考查根据椭圆的定义求椭圆的方程，椭圆中的定点定值问题.

【解析】（Ⅰ）$|PO_1|+|PO_2|=|PR|+|PO_2|=|RO_2|=|QO_1|=2\sqrt{2}$，…………（2分）

所以点 P 的轨迹是一个椭圆，且长轴长 $2a=2\sqrt{2}$，半焦距 $c=1$，…………（3分）

所以 $b^2=a^2-c^2=1$，轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(y\neq 0)$. …………（4分）



（Ⅱ）当直线 AB 的斜率为0时，与曲线 C 无交点. …………（5分）

当直线 AB 的斜率不为0时，设过点 O_2 的直线方程为 $x=my+1$，点 A,B 坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

直线与椭圆方程联立得 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.

则 $y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$. …………（7分）

直线 KA 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=0$ 得 $y_M=\frac{(m-2)y_1+1}{my_1-1}$. …………（8分）

同理可得 $y_N=\frac{(m-2)y_2+1}{my_2-1}$. …………（9分）

所以
$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{[(m-2)y_1+1](my_2-1)+[(m-2)y_2+1](my_1-1)}{(my_1-1)(my_2-1)}$$
$$=\frac{m(m-2)y_1y_2+(y_1+y_2)-1}{m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1}$$
$$=\frac{-m(m-2)-2m-(m^2+2)}{-m^2+2m^2+m^2+2}$$
$$=-1,$$

所以 MN 的中点为 $(0,-1)$. …………（10分）

不妨设 M 点在 N 点的上方，

则 $S_{\triangle KMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot 2=|MN|=2[y_M-(-1)]\leqslant 2\times(1+1)=4$. …………（12分）

21.【命题意图】 本题考查导数的计算，利用导数研究函数的性质.

【解析】（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+x+1-a$. …………（1分）

易知 $f'(x)$ 单调递增，由题意有 $f'\left(\frac{a}{2}\right)=\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1\geqslant 0$. …………（2分）

令 $g(a)=\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1$，则 $g'(a)=\frac{2-a}{2a}$.

令 $g'(a)=0$ 得 $a=2$.

所以当 $0<a<2$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增；当 $a>2$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减. …………（4分）

所以 $g(a)\leqslant g(2)=0$,而又有 $g(a)\geqslant 0$,因此 $g(a)=0$,所以 $a=2$. ……………………………… (5分)

(Ⅱ)由 $f(2)=2\ln 2+2-a>0$ 知 $a<2\ln 2+2<4$,又由于 $a\in\mathbf{Z}$,则 $a_{\max}=3$. ……………………………… (6分)

下面证明 $a=3$ 符合条件.

若 $a=3$,$f(x)=x\ln x+\dfrac{x^2}{2}-3(x-1)$. 所以 $f'(x)=\ln x+x-2$. ……………………………… (7分)

易知 $f'(x)$ 单调递增,而 $f'(1)=-1<0$,$f'(1.6)\approx 0.5+1.6-2=0.1>0$,

因此必存在 $x_0\in(1,1.6)$ 使得 $f'(x_0)=0$,即 $\ln x_0=2-x_0$. ……………………………… (8分)

且当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增. ……………………………… (9分)

则 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0\ln x_0+\dfrac{x_0^2}{2}-3(x_0-1)$

$=x_0(2-x_0)+\dfrac{x_0^2}{2}-3(x_0-1)=3-\dfrac{x_0^2}{2}-x_0$ ……………………………… (11分)

$>3-\dfrac{1.6^2}{2}-1.6=0.12>0$.

综上,a 的最大值为3. ……………………………… (12分)

22.【命题意图】 本题考查参数方程与极坐标方程的互化,极坐标方程与直角坐标方程的互化,极坐标中 ρ 的几何意义.

【解析】 (Ⅰ)直线 l_1 的极坐标方程为 $\theta=\varphi(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………… (1分)

直线 l_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………… (2分)

由曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2\sin^2\theta=\rho\cos\theta$,

所以 C 的直角坐标方程为 $y^2=x$. ……………………………… (4分)

(Ⅱ)l_1 与 C 的极坐标方程联立得 $\begin{cases}\theta=\varphi,\\ \rho\sin^2\theta=\cos\theta,\end{cases}$ 所以 $\rho_A=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. ……………………………… (5分)

l_2 与 C 的极坐标方程联立得 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi,\\ \rho\sin^2\theta=\cos\theta,\end{cases}$ 所以 $\rho_B=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. ……………………………… (6分)

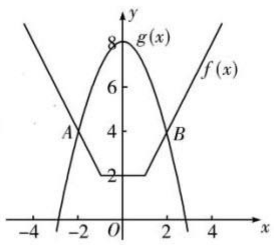
所以 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_A\rho_B|=\dfrac{|\cos\varphi|}{\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi}=\dfrac{1}{|\sin\varphi\cos\varphi|}=\dfrac{2}{|\sin 2\varphi|}$. ……………………………… (8分)

所以当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$|OA|\cdot|OB|$ 取最小值2. ……………………………… (10分)

23.【命题意图】 本题考查绝对值不等式、基本不等式.

【解析】 (Ⅰ)$f(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases}2x(x>1),\\ 2(-1\leqslant x\leqslant 1),\\ -2x(x<-1).\end{cases}$ ……………………………… (2分)

令 $g(x)=8-x^2$,作出它们的大致图象如下:



……………………………… (4分)

由 $8-x^2=2x\Rightarrow x=2$ 或 $x=-4$(舍),得点 B 横坐标为 2,由对称性知,点 A 横坐标为 -2,

因此不等式 $f(x)\leqslant 8-x^2$ 的解集为 $[-2,2]$. ………………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)$f(x)=|x-a|+|x+b|\geqslant|(x+b)-(x-a)|=|a+b|=a+b=1$. ………………………………(6 分)

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2b}\right)[(a+1)+b]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a+1}+\frac{a+1}{2b}+\frac{1}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

……………………………………………………………………………………………………(9 分)

取等号的条件为 $\frac{b}{a+1}=\frac{a+1}{2b}$,即 $a+1=\sqrt{2}b$,联立 $a+b=1$ 得 $\begin{cases}a=3-2\sqrt{2},\\ b=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$

因此 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………(10 分)