数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	D	D	A	B	A

【解析】

1. $\forall x\in B$，x 是 6 的倍数，且为正整数，可知 x 必是 3 的倍数，$x\in A$，所以 $B\subseteq A$，$A\cap B=B$．又 $0\in A$，$0\notin B$，所以 $B\subsetneqq A$，故选 C．

2. $z=\dfrac{(1+i)^3}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2(1+i)}{1-i}=i(1+i)^2=-2$，所以 $|z|=2$，故选 B．

3. 由 $(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$，可知 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2$，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，所以 $\sqrt{1^2+m^2}=\sqrt{(-2)^2+1^2}$，解得 $m=\pm2$，又 $m>0$，$\therefore m=2$，故选 C．

4. 由第七次人口普查，全国人口共 141178 万人，与第六次全国人口普查数据的 133972 万人相比，增加 7206 万人，增长 5.38%，年平均增长率为 0.53%，可知增长率为 $\dfrac{7206}{133972}\approx5.38\%$，年平均增长率是方程 $133972\times(1+x)^{10}=141178$ 的解，$x\approx0.53\%=0.0053$，故 A 正确，B 也正确；设总人口性别比为 n，则女性人口占总人口比例为 $\dfrac{100}{100+100n}$．结合图可知，七次人口普查中，第七次人口普查 n 最小，女性人口占总人口比例最大，故 C 正确；第七次人口普查出生人口性别比为 111.3，说明新生儿男性对女性的比例为 $111.3:100$，但某地出生人口性别比不一定等于全国出生人口性别比，所以 D 不正确，故选 D．

5. $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x-y)^3=x(x-y)^3+\dfrac{y^2}{x}(x-y)^3$，含 xy^3 的项为 $x\mathrm{C}_3^3(-y)^3+\dfrac{y^2}{x}\mathrm{C}_3^1x^2(-y)=-xy^3-3xy^3=-4xy^3$，所以 $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x-y)^3$ 展开式中 xy^3 的系数为 -4，故选 D．

6. $a_1=1$，$a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$．当 $q>0$ 时，$a_n>0$，可知 $S_n>0$．所以“$q>0$”是“$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$ 恒成立”的充分条件．又当 $q=-\dfrac{1}{2}$ 时，$S_n=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$．若 n 为偶数，

$e=\dfrac{\sqrt{10m^2}}{\sqrt{m^2}}=\sqrt{10}$，故 B 错误．又 $mn\neq 0$，直线 l：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$ 过点 $(m,\ 0)$，$(0,\ n)$，斜率 $k=-\dfrac{n}{m}$．双曲线 E_2：$\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{n}{m}x$，直线 l 过 E_2 的一个顶点且与 E_2 的渐近线平行，所以直线 l 与曲线 E_2 有且只有一个公共点，故 C 正确．曲线 E_1：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ 与 x 轴的交点是 $(m,\ 0)$，$(-m,\ 0)$，与 y 轴的交点是 $(0,\ n)$，$(0,\ -n)$．所以直线 l 与曲线 E_1 相交，弦长为 $\sqrt{m^2+n^2}$，当 $m=n=1$ 时，E_1：$x^2+y^2=1$，l：$x+y=1$，曲线 E_1 截直线 l 的弦长为 $\sqrt{2}$，故 D 正确，故选 ACD.

12．记事件 $E=$“一次试验硬币正面朝上”，则 $\overline{E}=$“一次试验硬币反面朝上”，则 $P(E)=P(\overline{E})=\dfrac{1}{2}$．从箱子中不放回地抽球，记 $A_i=$“第 i 次抽到白色小球”，记 $B_i=$“第 i 次抽到红色小球”，$D_i=$“第 i 次硬币正面朝上且抽到白色小球”，记 $F_i=$“第 i 次硬币正面朝上且抽到红色小球”，所以 $P(D_1)=P(A_1E)=P(E)\times P(A_1\mid E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{10}$，经过两次试验后，试验者手中共有 2 个白球的概率为 $P(D_1D_2)=P(D_1)P(D_2\mid D_1)=\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{4}\right)=\dfrac{3}{40}$，故 A 正确；已知第一次试验抽到一个白球，则第二次试验后，试验者手中共有 1 白球和 1 红球的概率为 $P(F_2\mid D_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{4}$，故 B 不正确；试验 6 次后停止等价于前 5 次有 4 次硬币正面朝上，第 6 次硬币正面朝上，所以其概率为 $C_5^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{5}{64}$，故 C 正确；试验 n 次后停止概率为 P_n，则 $n\geqslant 5$，$P_n=C_{n-1}^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=C_{n-1}^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$．令 $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}\geqslant 1$，得 $\dfrac{C_n^4}{2C_{n-1}^4}\geqslant 1$，化简可得 $\dfrac{n}{2(n-4)}\geqslant 1$，解得 $n\leqslant 8$，可知 $P_5<P_6<P_7<P_8=P_9>P_{10}>P_{11}>\cdots$，所以经过 8 次或者 9 次试验后小球全部取出的概率最大，故 D 不正确，故选 AC.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-3	36	$4:3$；$4\sqrt{2}:3$	15

则 $S_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\geqslant\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}>0$；若 n 为奇数，则 $S_n=\frac{2}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]>0$．所以，当 $q=-\frac{1}{2}$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$ 恒成立．综上，“$q>0$”是“$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$ 恒成立”的充分不必要条件，故选 A．

7．如图 1 所示，因为 $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，$AP\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1A\perp AP$，$\because |A_1A|=3$，由 $3\leqslant|A_1P|\leqslant\sqrt{11}$，$|A_1P|=\sqrt{|AP|^2+|AA_1|^2}$，则 $0\leqslant|AP|\leqslant\sqrt{2}$；所以 P 在以 A 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆上及圆内部，由题意可知，$V_{P-A_1BD}=V_{A_1-PBD}=\frac{1}{3}|AA_1|\cdot S_{\triangle PBD}$，$P$ 到 BD 的最小距离为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $S_{\triangle PBD}$ 的面积的最小值是 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{2}=\frac{3}{2}$，所以四面体 $P-A_1BD$ 的体积的最小值是 $\frac{1}{3}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，故选 B．

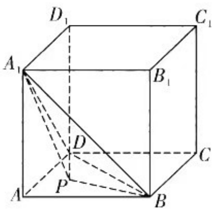

图 1

8．因为 $2\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以 $\cos2\in(-1,\ 0)$，所以 $\cos(\cos2)>0$，$\sin(\cos2)<0$，可得 $a>b$．构造函数 $f(x)=\sin x-x$，$f'(x)=\cos x-1\leqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，当 $x<0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，所以 $\sin x>x$，可知 $\sin(\cos2)>\cos2$，即 $b>\cos2$．$\cos2=2\cos^21-1$，$c-\cos2=\ln(\cos1)-2\cos^21+1$，又 $1\in\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\cos1\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，构造函数 $g(x)=\ln x-2x^2+1$，法一：$g'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 上单调递减，$g(x)<g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=-\ln2+\frac{1}{2}<0$，可知 $\ln(\cos1)-2\cos^21+1<0$，所以 $c<\cos2$．法二：考虑 $h(x)=\ln x-x+1$，$h'(x)=\frac{1}{x}-1$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 上单调递增，$h(x)<h(1)=0$，即 $\ln x<x-1$．所以当 $x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ 时，$g(x)=\ln x-2x^2+1<x-1-2x^2+1=2x\left(\frac{1}{2}-x\right)<0$，可知 $\ln(\cos1)-2\cos^21+1<0$，所以 $c<\cos2$．综上，$a>0>b>\cos2>c$，故选 A．

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	ABC	BCD	ACD	AC

【解析】

9．$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+1=2\sin 2x+1$，所以函数$g(x)$最小正周期为$\pi$，故A正确；令$h(x)=2\sin 2x$，$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$，$h(0)=0$，$h(x)$的图象向上平移1个单位后得到$g(x)$的图象，所以$g(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{4}$轴对称，关于$(0,\ 1)$中心对称，故B，C正确，D不正确，故选ABC．

10．由题意知，直线$y=-\frac{1}{4}x+a$与$y=f(x)$的图象有2个交点．当直线$y=-\frac{1}{4}x+a$过点$A(1,\ 2)$时，$a=\frac{9}{4}$，当直线$y=-\frac{1}{4}x+a$过点$B(1,\ 1)$时，$a=\frac{5}{4}$．结合图象如图2可知，当$\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant\frac{9}{4}$时，

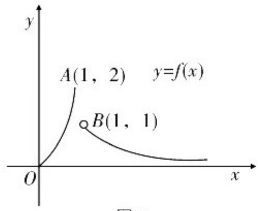

图2

直线$y=-\frac{1}{4}x+a$与$y=f(x)$的图象有2个交点，$f(x)=-\frac{1}{4}x+a$恰有两个互异的实数解．又当直线$y=-\frac{1}{4}x+a$与曲线$y=\frac{1}{x}$相切在第一象限时，直线$y=-\frac{1}{4}x+a$与$y=f(x)$的图象也有2个交点．法一：$y=\frac{1}{x}$，$y'=-\frac{1}{x^2}$，令$-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}$，当$x>0$时，得$x=2$，$f(2)=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\times 2+a$，得$a=1$．法二：令$\frac{1}{x}=-\frac{1}{4}x+a$，化简可得$x^2-4ax+4=0$，由$\Delta=(4a)^2-16=0$，得$a=\pm 1$，又由图可知$a>0$，所以$a=1$，此时直线$y=-\frac{1}{4}x+a$与曲线$y=\frac{1}{x}$相切于点$\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$．综上，实数$a$的取值范围是$\left[\frac{5}{4},\ \frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$，故选BCD．

11．当$n=3m$时，曲线E_1：$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{9m^2}=1$是焦点在$y$轴上的椭圆，离心率$e=\frac{\sqrt{8m^2}}{\sqrt{9m^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故A正确．当$n=3m$时，曲线$E_2$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{9m^2}=1$是焦点在$x$轴上的双曲线，离心率

【解析】

13．由 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=2$，解得 $\tan\alpha=-3$，所以 $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=-3$．

14．记 2 个相同的“竹林春熙”为 A，A，“冰雪派对”为 B，“青云出岫”为 C，“如意东方”为 D，先摆放 B，C，D，一共有 A_3^3 种摆放方式，再将 2 个 A 插空放入，有 C_4^2 种摆放方式，所以，一共有 $A_3^3\times C_4^2=36$ 种摆放方式．

15．设球 O 的半径为 r，体积为 V_3，表面积为 S_3，则圆柱 O_1O_2 的底面半径为 r，高为 $2r$，球 O' 半径为 $\sqrt{2}r$．由阿基米德得出的结论 $V_2=\dfrac{3}{2}V_3$，$S_2=\dfrac{3}{2}S_3$，又球 O 与球 O' 的半径比为 $1:\sqrt{2}$，所以 $V_1=2\sqrt{2}V_3$，$S_1=2S_3$，所以 $S_1:S_2=4:3$，$V_1:V_2=4\sqrt{2}:3$．

16．根据椭圆的方程可得 $a=3$，$b=\sqrt{5}$，焦点坐标为 $F_1(-2,\ 0)$，$F_2(2,\ 0)$，点 A 在以 F_1F_2 为直径的圆上，设 O 为坐标原点，所以 $|F_1O|=|OA|=2$．由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AP}$，可知点 A 是线段 PF_1 的中点，故 $\dfrac{|OA|}{|F_2P|}=\dfrac{1}{2}$，则 $|F_2P|=4$，又点 P 在椭圆 C 上，故 $|F_1P|+|F_2P|=2a=6$，则 $|F_1P|=2$．在 $\triangle AF_1F_2$ 中，$F_2A\perp AF_1$，即 $F_2A\perp AP$，所以 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2P}=\overrightarrow{F_2A}\cdot(\overrightarrow{F_2A}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{F_2A}^2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，$AF_2^2=F_1F_2^2-AF_1^2=15$．综上，$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2P}=15$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）$\because AB\perp AC$，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=2$，$\therefore BC=4$．

记 $\angle ACD=\alpha$，则 $CD=2\cos\alpha$，$\angle BCD=\alpha+60^\circ$，$\angle CBD=60^\circ-\alpha$，

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin 60^\circ}$，$\therefore \dfrac{2\cos\alpha}{\sin(60^\circ-\alpha)}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

……………………………………………………………………………………（3 分）

化简得 $\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\alpha$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

可知 $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，即 $\cos\angle ACD=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

……………………………………………………………………………………（5 分）

（2）解法一：由（1）知：$\sin\angle BCD=\sin(\alpha+60^\circ)=\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

……………………………………………………………………………………（7 分）

由正弦定理得：$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{BC}{\sin 60^\circ}$，∴ $BD=\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$． ……………………………（10 分）

解法二：在 Rt$\triangle ACD$ 中，$CD=2\cos\alpha=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$， ……………………………………（7 分）

在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理得：$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos 60^\circ$，

∴ $7BD^2-4\sqrt{7}BD-96=0$，解得 $BD=\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$．

……………………………………………………………………………………（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）延长 AN 交直线 DC 于点 P，连接 PD_1，如图 3．

由 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD_1}$，$\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BD}$，可知$\dfrac{|AM|}{|AD_1|}=\dfrac{|BN|}{|BD|}=k$．

∵ $AB/\!/CD$，∴ $\dfrac{|BN|}{|ND|}=\dfrac{|AN|}{|NP|}$，∴ $\dfrac{|BN|}{|BD|}=\dfrac{|AN|}{|AP|}=k$，

∴ $\dfrac{|AN|}{|AP|}=\dfrac{|AM|}{|AD_1|}=k$．

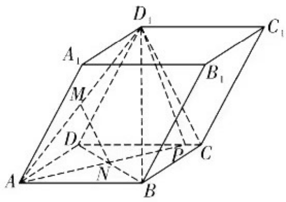

图 3

……………………………………………………………………………………（2 分）

因此，当 $k\in(0,1)$ 时，$MN/\!/PD_1$，$MN\not\subset$ 平面 CDD_1C_1，$PD_1\subset$ 平面 CDD_1C_1，

∴ $MN/\!/$ 平面 CDD_1C_1．

……………………………………………………………………………………（3 分）

当 $k=1$ 时，MN 即为 D_1D，∴ $MN\subset$ 平面 CDD_1C_1． ……………………………………（4 分）

（2）记 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，

则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………（6 分）

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$，

$|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})^2}=\sqrt{2}$，……………………………………………………………（8 分）

方法一：

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 与点 C 重合，连接 D_1C，如图，

∵ $MN/\!/D_1C$，∴异面直线 BD_1 与 MN 所成角即为直线 BD_1 与 D_1C 所成角．

在$\triangle DD_1C$ 中，$D_1D=DC=1$，$\angle D_1DC=60^\circ$，∴ $D_1C=1$． ……………………………（10 分）

在$\triangle BD_1C$中，$\cos\angle BD_1C=\dfrac{D_1B^2+D_1C^2-BC^2}{2D_1B\times D_1C}=\dfrac{2+1-1}{2\times\sqrt{2}\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴异面直线BD_1与MN所成角为$45°$. ……………………………………………（12 分）

方法二：

当$k=\dfrac{1}{2}$时，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c})$，

$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}(\vec{a}-\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………………（10 分）

设异面直线BD_1与MN所成角为θ，

则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{BD_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴异面直线BD_1与MN所成角为$45°$. ……………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）由散点图可知，$y=ce^{dx}$更适合作为龙陵县紫皮石斛产量y关于年份代码x的回归方程类型.……………………………………………………………………………（2 分）

（2）对$y=ce^{dx}$两边取自然对数，得$\ln y=\ln c+dx$.

令$u=\ln y$，$v=\ln c$，所以$u=v+dx$. ……………………………………………（4 分）

因为$\overline{x}=3.5$，$\overline{u}=8.46$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2=17.5$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(u_i-\overline{u})=3.85$，

所以$\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(u_i-\overline{u})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{3.85}{17.5}=0.22$，

$\hat{v}=\overline{u}-\hat{d}\overline{x}=8.46-0.22\times3.5=7.69$，

所以$\hat{u}=0.22x+7.69$. ………………………………………………………………（9 分）

所以龙陵县紫皮石斛产量y关于年份代码x的回归方程为$\hat{y}=e^{0.22x+7.69}$.

……………………………………………………………………………（10 分）

（3）当$x=9$时，$\hat{y}=e^{0.22\times9+7.69}=e^{9.67}\approx15835>15000$，

故预测该目标可以完成. ……………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）当n为偶数时，$a_{n+1}+a_n=2n-1$，……………………………………（1 分）

$\therefore a_3+a_2=3$，$a_5+a_4=7$，

$\therefore S_5=a_1+3+7=a_1+10=11$，

解得 $a_1=1$． ……（4 分）

（2）当 n 为奇数时，$a_{n+1}-a_n=2n-1$，$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+1$，两式相减得 $a_{n+2}+a_n=2$，

又 $a_1=1$，$\therefore n$ 为奇数时，$a_n=1$；

当 n 为偶数时，$a_{n+1}+a_n=2n-1$，$\therefore a_n=2n-2$，

综上，$a_n=\begin{cases}1, & n\text{为奇数},\\ 2n-2, & n\text{为偶数},\end{cases}$ ……（8 分）

$\therefore a_{2n}+2=4n$，$b_n=\log_2(4n)=2+\log_2 n$， ……（9 分）

法一：$\lceil b_n\rceil=\lceil 2+\log_2 n\rceil=2+\lceil\log_2 n\rceil$，令 $\lceil b_n\rceil=5$，得 $\lceil\log_2 n\rceil=3$，解得 $n=5$，6，7，8．

因此，存在正整数 n，使得 $\lceil b_n\rceil=5$，n 的取值集合为 $\{5,6,7,8\}$．

……（12 分）

法二：令 $\lceil b_n\rceil=5$，则 $4<b_n\leqslant 5$，即 $4<2+\log_2 n\leqslant 5$，

$\therefore 2<\log_2 n\leqslant 3$，$\therefore n=5$，6，7，8．

因此，存在正整数 n，使得 $\lceil b_n\rceil=5$，n 的取值集合为 $\{5,6,7,8\}$．

……（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题得 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，且 l_{AB} 的斜率存在，设 l_{AB}：$y=kx+\dfrac{p}{2}$．

联立方程 $\begin{cases}y=kx+\dfrac{p}{2},\\ x^2=2py,\end{cases}$ 得 $x^2-2pkx-p^2=0$，

可知 $\Delta>0$ 恒成立，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，

则 $x_A+x_B=2pk$，$x_Ax_B=-p^2$， ……（3 分）

若选条件①，$y_A\cdot y_B=\dfrac{(x_Ax_B)^2}{4p^2}=\dfrac{p^2}{4}$，

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_Ax_B+y_Ay_B=-p^2+\dfrac{p^2}{4}=-\dfrac{3p^2}{4}=-12$，

$\therefore p=4$，

故抛物线的方程为 $x^2=8y$． ……（6 分）

若选条件②，$y_A \cdot y_B = \dfrac{(x_A x_B)^2}{4p^2} = \dfrac{p^2}{4}$，

由抛物线定义得 $\dfrac{1}{|AF|} + \dfrac{1}{|BF|} = \dfrac{1}{y_A + \dfrac{p}{2}} + \dfrac{1}{y_B + \dfrac{p}{2}} = \dfrac{y_A + y_B + p}{y_A y_B + \dfrac{p}{2}(y_A + y_B) + \dfrac{p^2}{4}} =$

$\dfrac{y_A + y_B + p}{\dfrac{p}{2}(y_A + y_B + p)} = \dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore p = 4$，故抛物线的方程为 $x^2 = 8y$．…………………………………………………（6 分）

若选条件③，$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{p}{2} \times |x_A - x_B| = \dfrac{p}{4}\sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = \dfrac{p}{4}\sqrt{4p^2k^2 + 4p^2}$

$= \dfrac{p^2}{2}\sqrt{k^2+1}$，当且仅当“$k = 0$”时，$\triangle OAB$ 面积有最小值为 $\dfrac{p^2}{2}$，

$\therefore \dfrac{p^2}{2} = 8$，$p = 4$，故抛物线的方程为 $x^2 = 8y$．…………………………………………（6 分）

（2）解法一：由（1）得抛物线的方程为 $x^2 = 8y$，$p = 4$，$F(0,\ 2)$，故 $x_A x_B = -16$，

如图 4，$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 重心，$\therefore x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0$，且 $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG}$，

$$\therefore T = \frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle CQG}} = \frac{\dfrac{|x_A|}{|x_B - x_A|} \cdot S_{\triangle ABG}}{\dfrac{|x_C|}{|x_C - x_A|} \cdot S_{\triangle ACG}} = \frac{|x_A||x_C - x_A|}{|x_C||x_B - x_A|} = \left|\frac{-x_A(x_A + x_B + x_A)}{(x_B + x_A)(x_B - x_A)}\right| = \left|\frac{2x_A^2 + x_A \cdot x_B}{x_B^2 - x_A^2}\right|$$

$$= \left|\frac{2x_A^2 - 16}{\dfrac{16^2}{x_A^2} - x_A^2}\right| = \left|\frac{2x_A^4 - 16x_A^2}{x_A^4 - 16^2}\right| = \left|2 - 16 \cdot \frac{x_A^2 - 32}{x_A^4 - 256}\right|.$$

…………………………………………………（8 分）

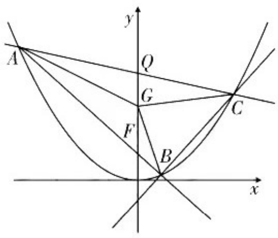

图 4

又 $k_{AC} = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \dfrac{\dfrac{x_A^2}{8} - \dfrac{x_C^2}{8}}{x_A - x_C} = \dfrac{x_A + x_C}{8}$，

$\therefore l_{AC}$：$y - y_A = \dfrac{x_A + x_C}{8}(x - x_A)$．

令 $x = 0$，得 $y_Q = y_A + \dfrac{x_A + x_C}{8}(-x_A) = \dfrac{x_A^2}{8} - \dfrac{x_A^2}{8} - \dfrac{x_A x_C}{8} = -\dfrac{x_A x_C}{8} > 2$，

则 $x_A x_C = x_A(-x_A - x_B) = -x_A^2 - x_A x_B = -x_A^2 + 16 < -16$，即 $x_A^2 > 32$．

……………………………………………………………………………（10 分）

令 $u=x_A^2-32>0$，则 $x_A^2=u+32$，

则 $T=\left|2-\dfrac{16u}{(u+32)^2-256}\right|=\left|2-\dfrac{16}{u+\dfrac{3\times16^2}{u}+64}\right|$，

∵ $u>0$，∴ $u+\dfrac{3\times16^2}{u}\geqslant 32\sqrt{3}$，当且仅当“$u=16\sqrt{3}$”，即“$x_A^2=16\sqrt{3}+32$”时取等.

∴ $2-\dfrac{16}{u+\dfrac{3\times16^2}{u}+64}\geqslant 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $T\geqslant 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $T\in\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$. ……………………………………………………（12 分）

法二：由（1）得抛物线的方程为 $x^2=8y$，$p=4$，$F(0,\ 2)$，

故 $x_Ax_B=-16$，$y_Ay_B=\dfrac{(x_Ax_B)^2}{64}=4$，

∵ A 在抛物线上，不妨设 $A(2\sqrt{2}t,\ t^2)$（$t\neq0$），则 $B\left(\dfrac{-4\sqrt{2}}{t},\ \dfrac{4}{t^2}\right)$，

∵ G 为△ABC 重心，∴ $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=0$，则 $x_C=\dfrac{4\sqrt{2}}{t}-2\sqrt{2}t$，

又 $S_{\triangle AGB}=S_{\triangle AGC}$，

所以 $S_{\triangle AFG}=\dfrac{|x_A|}{|x_B-x_A|}\cdot S_{\triangle AGB}=\left|\dfrac{2\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}t-\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{t}\right)}\right|\cdot S_{\triangle AGB}=\left|\dfrac{t^2}{t^2+2}\right|\cdot S_{\triangle AGB}$，

$S_{\triangle CQG}=\dfrac{|x_C|}{|x_C-x_A|}\cdot S_{\triangle AGC}=\left|\dfrac{\dfrac{4\sqrt{2}}{t}-2\sqrt{2}t}{\dfrac{4\sqrt{2}}{t}-2\sqrt{2}t-2\sqrt{2}t}\right|\cdot S_{\triangle AGC}=\left|\dfrac{2-t^2}{2-2t^2}\right|\cdot S_{\triangle AGC}$，

$T=\dfrac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle CQG}}=\dfrac{\left|\dfrac{t^2}{t^2+2}\right|}{\left|\dfrac{2-t^2}{2-2t^2}\right|}=\left|\dfrac{t^2(2-2t^2)}{(t^2+2)(2-t^2)}\right|=\left|\dfrac{2t^4-2t^2}{t^4-4}\right|=2\left|1-\dfrac{t^2-4}{t^4-4}\right|$，

……………………………………………………………………………（8 分）

又 $k_{AC}=\dfrac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\dfrac{\dfrac{x_A^2}{8}-\dfrac{x_C^2}{8}}{x_A-x_C}=\dfrac{x_A+x_C}{8}=\dfrac{1}{\sqrt{2}t}$，

$\therefore l_{AC}$：$y-t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}t}(x-2\sqrt{2}t)$．

令 $x=0$，得 $Q(0,\ t^2-2)$，又点 Q 在点 F 上方，可知 $t^2-2>2$，即 $t^2>4$．

……………………………………………………………………………………（10 分）

令 $m=t^2-4$，则 $m>0$，

$$T=2\left|1-\frac{m}{(m+4)^2-4}\right|=2\left|1-\frac{1}{m+\dfrac{12}{m}+8}\right|,$$

$\because m>0$，$\therefore m+\dfrac{12}{m}\geqslant 4\sqrt{3}$，当且仅当“$m=2\sqrt{3}$”，即“$t^2=4+2\sqrt{3}$”时取等.

$\therefore 1-\dfrac{1}{m+\dfrac{12}{m}+8}\geqslant 1-\dfrac{1}{4\sqrt{3}+8}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore T\geqslant 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $T\in\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$．……………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：$f'(x)=2ax-\ln x-1$，由题意，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上恒成立，

……………………………………………………………………………………（2 分）

$\therefore 2a\geqslant\dfrac{\ln x+1}{x}$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，$g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

当 $x=1$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$．

$\therefore g(x)$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上单调递减，$g(x)_{\max}=g(1)=1$．

$\therefore 2a\geqslant 1$，$a\geqslant\dfrac{1}{2}$．

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$．……………………………………………（5 分）

（2）证明：由（1）知：当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$f(x)\geqslant f(1)=0$.

$\therefore$当$x\geqslant 1$时，$x\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x^2-1)$，…………（7 分）

令$x=1+\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$\frac{n+1}{n}\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}+2\right)$，$\therefore\frac{n+1}{n}\ln\frac{n+1}{n}<\frac{2n+1}{2n^2}$.

$\therefore\ln\frac{n+1}{n}<\frac{2n+1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，可得$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$.

…………（9 分）

$$\therefore\begin{cases}\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),\\ \ln(n+2)-\ln(n+1)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),\\ \cdots\\ \ln(2n)-\ln(2n-1)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right),\end{cases}$$

累加得$\ln(2n)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$，

$\therefore\ln 2<\frac{1}{2n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{4n}$，

$\therefore\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\ln 2-\frac{1}{4n}$得证.

…………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。