# 海淀区高三年级第一学期期末练习参考答案

## 数　　学（理科）　　　　2019.01

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.**

1. A　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C　　6. C　　7.C　　8. D

**二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

9. $(x-1)^2+y^2=4$　　10. $24$　　11. $2\sqrt{3},2$　　12. $0$

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　14. $\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

**三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.**

15．解：（Ⅰ）因为 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$,

$f(\frac{\pi}{2})=a+1$

所以 $f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{6})=(a+1)-(\frac{a}{2}-\frac{1}{2})=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}$

因为$a>0$，所以$\frac{a}{2}+\frac{3}{2}>0$，所以 $f(\frac{\pi}{2})>f(\frac{\pi}{6})$

（Ⅱ）因为 $f(x)=a\sin x-\cos 2x$

$=a\sin x-(1-2\sin^2 x)$

$=2\sin^2 x+a\sin x-1$

设$t=\sin x$,　$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，所以$t\in[-1,1]$

所以 $y=2t^2+at-1$

其对称轴为$t=-\frac{a}{4}$

当$t=-\frac{a}{4}<-1$，即　$a>4$时，在$t=-1$时函数取得最小值$1-a$

当$t=-\frac{a}{4}\geq -1$，即$0<a\leq 4$时，在$t=-\frac{a}{4}$时函数取得最小值$-\frac{a^2}{8}-1$

16.解：（Ⅰ）设该名学生考核成绩优秀为事件 $A$

由茎叶图中的数据可以知道，30 名同学中，有 7 名同学考核优秀

所以所求概率 $P(A)$ 约为 $\dfrac{7}{30}$

（II）$Y$ 的所有可能取值为 $0,1,2,3$

因为成绩 $X\in[70,80]$ 的学生共有 8 人，其中满足 $|X-75|\le 10$ 的学生有 5 人

所以 $P(Y=0)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$，　$P(Y=1)=\dfrac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$

$P(Y=2)=\dfrac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}$，　$P(Y=3)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}$

随机变量 $Y$ 的分布列为

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{15}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{10}{56}$ |

$$E(Y)=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{30}{56}+3\times\frac{10}{56}=\frac{15}{8}$$

（III）根据表格中的数据，满足 $\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\le 1$ 的成绩有 16 个

所以 $P\left(\left|\dfrac{X-85}{10}\right|\le 1\right)=\dfrac{16}{30}=\dfrac{8}{15}>0.5$

所以可以认为此次冰雪培训活动有效.

17．解：（Ⅰ）在平面 $PCD$ 中过点 $D$ 作 $DH\perp DC$，交 $PC$ 于 $H$

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $PCD$

$DH\subset$ 平面 $PCD$

平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$

所以 $DH\perp$ 平面 $ABCD$

因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $DH\perp AD$

又 $AD\perp PC$，且 $PC\cap DH=H$

所以 $AD\perp$ 平面 $PCD$

（Ⅱ）因为 $AD\perp$ 平面 $PCD$，所以 $AD\perp CD$

又 $DH\perp CD$，$DH\perp AD$

以 $D$ 为原点，$DA$，$DC$，$DH$ 所在直线分别为 $x,y,z$ 轴，建立空间直角坐标系

所以 $D(0,0,0),A(2,0,0),P(0,-1,\sqrt{3}),C(0,2,0),B(2,1,0)$，

因为 $AD\perp$ 平面 $PCD$，所以取平面 $PCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$

设平面 $PBD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

因为 $\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{DB}=(2,1,0)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-y+\sqrt{3}z=0\\ 2x+y=0\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=-2\sqrt{3},x=-\sqrt{3}$，所以 $\vec{n}=(-\sqrt{3},2\sqrt{3},2)$

所以 $\cos<\overrightarrow{AD},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AD}||\vec{n}|}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=-\dfrac{\sqrt{57}}{19}$

由题知 $B-PD-C$ 为锐角，所以 $B-PD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{19}$

（III）

**法一：**

假设棱 $BC$ 上存在点 $F$，使得 $MF\,/\!/\,PC$，显然 $F$ 与点 $C$ 不同

所以 $P,M,F,C$ 四点共面于 $\alpha$

所以 $FC\subset\alpha$，$PM\subset\alpha$

所以 $B \in FC \subset \alpha$， $A \in PM \subset \alpha$

所以 $\alpha$ 就是点 $A,B,C$ 确定的平面，所以 $P \in \alpha$

这与 $P-ABCD$ 为四棱锥矛盾，所以假设错误，即问题得证

**法二：**

假设棱 $BC$ 上存在点 $F$，使得 $MF \parallel PC$

连接 $AC$，取其中点 $N$

在 $\Delta PAC$ 中，因为 $M,N$ 分别为 $PA,CA$ 的中点，所以 $MN \parallel PC$

因为过直线外一点只有一条直线和已知直线平行，所以 $MF$ 与 $MN$ 重合

所以点 $F$ 在线段 $AC$ 上，所以 $F$ 是 $AC$， $BC$ 的交点 $C$，即 $MF$ 就是 $MC$

而 $MC$ 与 $PC$ 相交，矛盾，所以假设错误，问题得证

法三：假设棱 $BC$ 上存在点 $F$，使得 $MF \parallel PC$，

设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}=(1,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})+\lambda(-2,1,0)$

因为 $MF \parallel PC$，所以 $\overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{PC}=\mu(0,3,-\sqrt{3})$

所以有 $\begin{cases}1-2\lambda=0\\ \frac{3}{2}+\lambda=3\mu\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\mu\end{cases}$，这个方程组无解

所以假设错误，即问题得证

18．解：（Ⅰ）

因为 $a^2=2,b^2=1$，所以 $a=\sqrt{2},b=1,c=1$

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（Ⅱ）法一：

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

显然直线 $l$ 存在斜率，设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+2)$

所以 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$，所以 $(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$

$\Delta=8-16k^2>0$，所以 $k^2<\frac{1}{2}$

所以$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{2k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1} \end{cases}$

因为$B'(x_2,-y_2)$

所以$|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

因为$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}$

$$y_1+y_2=k(x_1+2)+k(x_2+2)=k(x_1+x_2)+4=\frac{4k}{2k^2+1}$$

所以 $|AB'|=\sqrt{\dfrac{8-16k^2}{(2k^2+1)^2}+\dfrac{16k^2}{(2k^2+1)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{8}{(2k^2+1)^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2k^2+1}$$

因为$0\le k^2<\dfrac{1}{2}$，所以$|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

**法二：**

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

当直线$l$是$x$轴时，$|AB'|=2\sqrt{2}$

当直线$l$不是$x$轴时，设直线$l$的方程为$x=ty-2$

所以$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \\ x=ty-2 \end{cases}$，所以$(t^2+2)y^2-4ty+2=0$，

$\Delta=8t^2-16>0$ ，所以$t^2>2$

所以$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2+2} \\ y_1y_2=\dfrac{2}{t^2+2} \end{cases}$

因为$B'(x_2,-y_2)$

所以$|AB'|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

因为 $(x_1-x_2)^2=(ty_1-ty_2)^2=t^2(y_1-y_2)^2=t^2[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=(t^2+1)\dfrac{16t^2}{(t^2+2)^2}$

所以 $|AB'|=\sqrt{(t^2+1)\dfrac{16t^2}{(t^2+2)^2}-\dfrac{8t^2}{t^2+2}}$

$$=\sqrt{\frac{8t^4}{(t^2+2)^2}}=\frac{2\sqrt{2}t^2}{t^2+2}=\frac{2\sqrt{2}t^2}{t^2+2}=2\sqrt{2}(1-\frac{2}{t^2+2})$$

因为 $t^2>2$，所以 $|AB'|\in(\sqrt{2},2\sqrt{2})$

综上，$|AB'|$ 的取值范围是 $(\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.

19．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{ax-x^2}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{\mathrm{e}^x}$

所以 $f'(1)=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}$，而 $f(1)=\dfrac{-2}{\mathrm{e}}$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-\dfrac{2}{\mathrm{e}})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1)$

化简得到 $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

（Ⅱ）法一：

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$，令 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}=0$

得 $x_1=\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2},x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当 $a>0$ 时，$x$，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,x_1)$ | $x_1$ | $(x_1,x_2)$ | $x_2$ | $(x_2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0),f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{e}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{e}$

因为 $x_2^{\,2}-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2^{\,2}}{e^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{e^{x_2}}$

设 $F(x)=\dfrac{a-2x}{e^x}$，其中 $x>0$，所以 $F'(x)=\dfrac{-2-(a-2x)}{e^x}=\dfrac{2x-(a+2)}{e^x}$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=\dfrac{a+2}{2}$，

当 $a>0$ 时，$x$，$F'(x)$，$F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,x_3)$ | $x_3$ | $(x_3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}$，而 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}>\dfrac{-2}{e}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$，所以 $f(x_2)=F(x_2)>-\dfrac{2}{e}$，问题得证

**法二：**

因为"对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}>-\dfrac{2}{e}$"等价于"对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}+\dfrac{2}{e}>0$"

即"$x>0$，$\dfrac{2e^x+e(ax-x^2)}{e^{x+1}}>0$"，故只需证"$x>0$，$2e^x+e(ax-x^2)>0$"

设 $g(x)=2e^x+e(ax-x^2)$，所以 $g'(x)=2e^x+e(a-2x)$

设 $h(x)=g'(x)$，$h'(x)=2e^x-2e$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=1$

当 $a>0$ 时，$x$，$h'(x)$，$h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | 0 | + |
| $h(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $h(x)$ $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $h(1)$，而 $h(1)=2\mathrm{e}+\mathrm{e}(a-2)=\mathrm{e}a>0$

所以 $x>0$ 时，$g'(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(a-2x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$，所以 $g(x)>0$，问题得证

**法三：**

“对任意的 $x>0$，$f(x)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$” 等价于 “$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值大于 $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$”

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{\mathrm{e}^x}$，令 $f'(x)=0$

得 $x_1=\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2},x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当 $a>0$ 时，$x$，$f'(x)$，$f(x)$ 在在 $(0,+\infty)$ 上的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,x_1)$ | $x_1$ | $(x_1,x_2)$ | $x_2$ | $(x_2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0),f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

因为 $x_2{}^2-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2{}^2}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}>\dfrac{-2x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 和 $a>0$，所以 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>2$

设 $F(x)=\dfrac{-2x}{\mathrm{e}^x}$，其中 $x>2$

所以 $F'(x)=\dfrac{-2(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{2(x-1)}{\mathrm{e}^x}$

当 $x>2$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增，所以 $F(x)>F(2)=-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$

而 $-\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}-(-\dfrac{2}{\mathrm{e}})=\dfrac{2\mathrm{e}-4}{\mathrm{e}^2}>0$

所以 $f(x_2)>F(x_2)>-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，问题得证

**法四：**

因为 $a>0$，所以当 $x>0$ 时， $f(x)=\frac{ax-x^2}{e^x}>\frac{-x^2}{e^x}$

设 $F(x)=\frac{-x^2}{e^x}$，其中 $x>0$

所以 $F'(x)=\frac{x(x-2)}{e^x}$

所以 $x$， $F'(x)$， $F(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $(0,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F(x)$ | ↘ | 极小值 | ↗ |

所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $F(2)=-\frac{4}{e^2}$， 而 $-\frac{4}{e^2}-(-\frac{2}{e})=\frac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $x>0$ 时， $F(x)>-\frac{2}{e}$

所以 $f(x)>F(x)>-\frac{2}{e}$

20. 解：（Ⅰ）满足 $\alpha*\beta=3$ 的元素为 $(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$

（Ⅱ）记 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$， $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，

注意到 $x_i\in\{0,1\}$，所以 $x_i(x_i-1)=0$，

所以 $\alpha*\alpha=(x_1+x_1-x_1y_1)+(x_2+x_2-x_2x_2)+\cdots+(x_n+x_n-x_nx_n)$

$=x_1+x_2+\cdots+x_n$

$\beta*\beta=y_1+y_2+\cdots+y_n$

因为 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n=n$

所以 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中有 $n$ 个量的值为 1， $n$ 个量的值为 0.

显然 $0\le\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$

$\le x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_n+y_n=n$，

当 $\alpha=(1,1,\cdots,1)$， $\beta=(0,0,\cdots,0)$ 时，

$\alpha$，$\beta$ 满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$， $\alpha*\beta=n$ .所以 $\alpha*\beta$ 的最大值为 $n$

又 $\alpha*\beta=(x_1+y_1-x_1y_1)+(x_2+y_2-x_2y_2)+\cdots+(x_n+y_n-x_ny_n)$

$=n-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$

注意到只有 $x_i=y_i=1$ 时，$x_iy_i=1$，否则 $x_iy_i=0$

而 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中 $n$ 个量的值为 1，$n$ 个量的值为 0

所以满足 $x_iy_i=1$ 这样的元素 $i$ 至多有 $\frac{n}{2}$ 个，

当 $n$ 为偶数时，$\alpha*\beta\ge n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$.

当 $\alpha=\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n}{2}\text{个}},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n}{2}\text{个}})$ 时，满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，且 $\alpha*\beta=\frac{n}{2}$.

所以 $\alpha*\beta$ 的最小值为 $\frac{n}{2}$

当 $n$ 为奇数时，且 $x_iy_i=1$，这样的元素 $i$ 至多有 $\frac{n-1}{2}$ 个，

所以 $\alpha*\beta\ge n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

当 $\alpha=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n+1}{2}\text{个}},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n-1}{2}\text{个}})$，$\beta=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\frac{n-1}{2}\text{个}},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{\frac{n+1}{2}\text{个}})$ 时，满足 $\alpha*\alpha+\beta*\beta=n$，$\alpha*\beta=\frac{n-1}{2}$.

所以 $\alpha*\beta$ 的最小值为 $\frac{n-1}{2}$

综上：$\alpha*\beta$ 的最大值为 $n$，当 $n$ 为偶数时，$\alpha*\beta$ 的最小值为 $\frac{n}{2}$，当 $n$ 为奇数时，$\alpha*\beta=\frac{n-1}{2}$.

（III）$S$ 中的元素个数最大值为 $\frac{n^2+n+2}{2}$

设集合 $S$ 是满足条件的集合中元素个数最多的一个

记 $S_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n-1,\alpha\in S\}$，

$S_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1+x_2+\cdots+x_n\le n-2,\alpha\in S\}$

显然 $S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$

集合 $S_1$ 中元素个数不超过 $n+1$ 个，下面我们证明集合 $S_2$ 中元素个数不超过 $C_n^2$ 个

$\forall\alpha\in S_2$，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n\le n-2$

则 $x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$ 中至少存在两个元素 $x_i=x_j=0$

$\forall \beta \in S_2$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$， $\beta \neq \alpha$

因为 $\alpha * \beta \geq n-1$，所以 $y_i, y_j$ 不能同时为 $0$

所以对 $1 \leq i < j \leq n$ 中的一组数 $i, j$ 而言，

在集合 $S_2$ 中至多有一个元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $x_i$，$x_j$ 同时为 $0$

所以集合 $S_2$ 中元素个数不超过 $C_n^2$ 个

所以集合 $S$ 中的元素个数为至多为 $n+1+C_n^2=n^2+n+1$

记 $T_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n-1, \alpha \in \Omega_n\}$，则 $T_1$ 中共 $n+1$ 个元素，

对于任意的 $\alpha \in T_1$， $\beta \in \Omega_n$， $\alpha * \beta \geq n-1$.

对 $1 \leq i < j \leq n$，记 $\beta_{i,j}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i=x_j=0$， $x_t=1$， $t \neq i, t \neq j$

记 $T_2=\{\beta_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$，

显然 $\forall \alpha, \beta \in S_2$， $\alpha \neq \beta$，均有 $\alpha * \beta \geq n-1$.

记 $S=T_1 \cup T_2$， $S$ 中的元素个数为 $n^2+n+1$，且满足 $\forall \alpha, \beta \in S$， $\alpha \neq \beta$，均有 $\alpha * \beta \geq n-1$.

综上所述， $S$ 中的元素个数最大值为 $n^2+n+1$.