湘豫名校联考（2022年5月）

数学（文科）试卷

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{y \mid y=x-\log_2 x, x\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,3,4\}$

【1题答案】

【答案】A

【解析】

【分析】根据对数的运算求出集合 B，再根据交集的定义可求出结果．

【详解】当 $x=1$ 时，$y=1-\log_2 1=1$，

当 $x=2$ 时，$y=2-\log_2 2=1$，

当 $x=3$ 时，$y=3-\log_2 3$，

当 $x=4$ 时，$y=4-\log_2 4=2$，

所以 $B=\{1,2,\log_2 3\}$，

所以 $A\cap B=\{1,2\}$．

故选：A

2. 已知复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$（i为虚数单位），则 $|z|$ 等于（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

【2题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】先利用复数的除法化简，再求模．

【详解】解：因为复数 z 满足 $(z-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，

所以 $z-2\mathrm{i}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}$，

则 $z=\mathrm{i}$，

所以 $|z|=1$，

故选：C

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=2$，$2a_2+a_4=a_3+13$，则该数列的公差为（　　）

A. $\dfrac{13}{5}$　　B. 3　　C. $\dfrac{13}{3}$　　D. 5

【3 题答案】

【答案】B

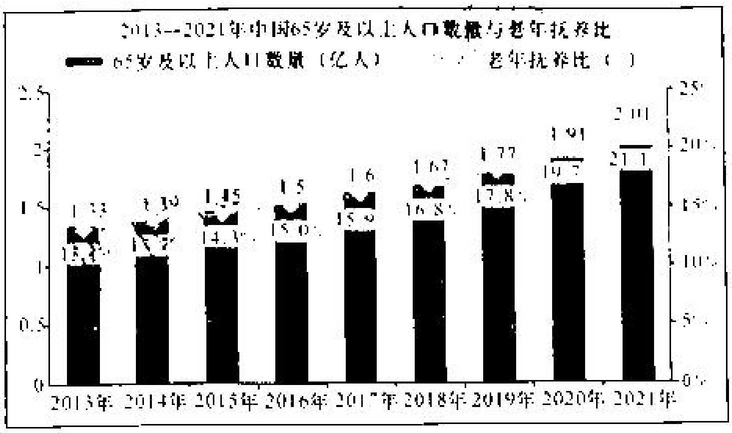
【解析】

【分析】根据等差数列的通项公式可求出结果.

【详解】设公差为 d，则由 $2a_2+a_4=a_3+13$ 得 $2(2+d)+2+3d=2+2d+13$，解得 $d=3$.

故更多试卷微信搜<高三答案公众号>选：B

4. 近年来，我国人口老龄化在不断加速，2013年至2021年，我国老年（65岁及以上）抚养比逐年攀升．下图为国家统计局对2013－2021年中国65岁及以上人口数量与老年抚养比统计．



根据上图进行分析，更多试卷微信搜<高三答案公众号>下列说法不正确的是（　　）

A. 2021年中国65岁及以上人口数量为2.01亿，同比2020年增长了约5.24%

B. 2021年老年抚养比为21.1%，较2020年增加了1.4%

C. 2013－2015年的老年抚养比增速不低于2019－2021年的老年抚养比增速

D. 2013－2021年中国65岁及以上人口数量的极差为0.68亿，中位数为1.6亿

【4 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】根据图标中的数据依次判断各个选项即可.

【详解】对于A，2021年中国65岁及以上人口数量为2.01亿，2020年中国65岁及以上人口数量为1.91亿，同比增长了$\frac{2.01-1.91}{1.91}\approx 5.24\%$，A正确；

对于B，2021年老年抚养比为21.1%，2020年老年抚养比为19.7%，增加了$21.1\%-19.7\%=1.4\%$，B正确；

对于C，$2013-2015$年的老年抚养比增加了$14.3\%-13.1\%=1.2\%$；$2019-2021$年的老年抚养比增加了$21.1\%-17.8\%=3.3\%$，

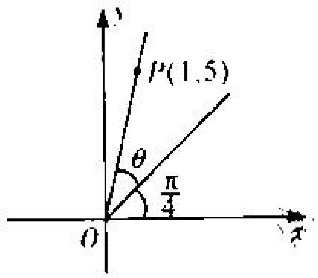
$\therefore 2013-2015$年的老年抚养比增速低于$2019-2021$年的老年抚养比增速，C错误；

对于D，$2013-2021$年中国65岁及以上人口数量的极差为$2.01-1.33=0.68$亿；

由中位数定义可知：更多试卷微信搜<高三答案公众号>中位数为1.6亿，D正确.

故选：C.

5. 已知角θ的大小如图所示，则$\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=$（　　）



A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{5}{8}$　　D. $-\frac{5}{2}$

【5题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】由$\theta+\frac{\pi}{4}$终边上的点坐标及和角正切公式求得$\tan\theta=\frac{2}{3}$，再将目标式由弦化切求值即可.

【详解】由题图知：$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=5$，则$\tan\theta=\frac{2}{3}$，

而$\frac{2\sin\theta-3\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{2\tan\theta-3}{\tan\theta+2}=-\frac{5}{8}$.

故选：C

6. 已知$e^a=4$，$9^b=e^2$，$c=\log_{\sqrt{3}}2$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

【6 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】根据指对数关系及对数运算性质有 $a=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 e}, b=\log_3 e, c=\log_3 4$，即可比较大小.

【详解】由题设，$a=\ln 4=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 e}, b=\log_9 e^2=\log_3 e, c=\log_3 4$，又 $0<\log_3 e<1<\log_3 4$，

所以 $a>c>b$.

故选：D

7. 已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 0 \\ x-y+2\le 0 \\ 5x+y+10\ge 0 \end{cases}$，则目标函数 $z=x-2y$ 的最大值为（　　）

A. -1　　B. -2　　C. -5　　D. -7

【7 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】画出约束条件所表示的平面区域，结合图象，确定目标函数的最优解，代入即可求解.

【详解】由题意，画出约束条件 $\begin{cases} x+y\le 0 \\ x-y+2\le 0 \\ 5x+y+10\ge 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域，如图所示，

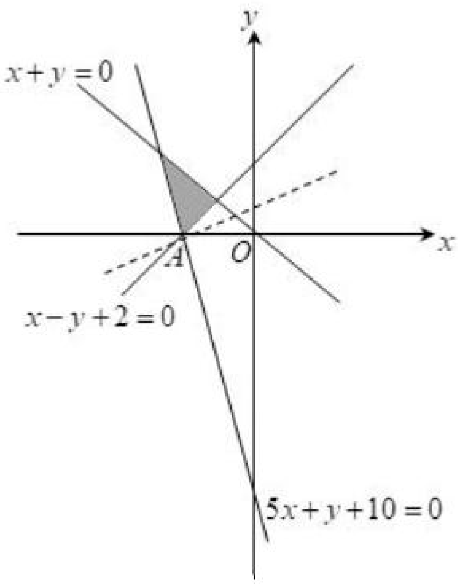
目标函数 $z=x-2y$，可化为直线 $y=\dfrac{1}{2}x+(-\dfrac{z}{2})$，

当直线过点 A 时，此时直线在 y 轴上的截距最小，此时目标函数取得最大值，

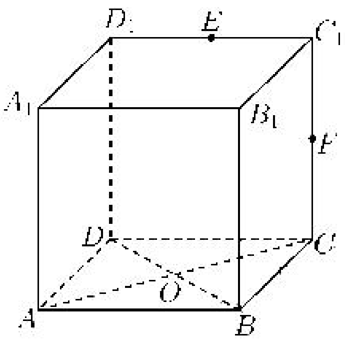
又由 $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 5x+y+10=0 \end{cases}$，解得 $A(-2,0)$，

所以更多试卷微信搜<高三答案公众号>目标函数的最大值为 $z=-2$.

故选：B.



8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 C_1D_1，CC_1 的中点，O 为正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点，更多试卷微信搜<高三答案公众号>则下列结论不正确的是（　　）



A. $OE//$平面 BB_1C_1C　　　　B. $OF//$平面 ABC_1D_1

C. $DE//$平面 AA_1C_1C　　　　D. $EF//$平面 A_1BD

【8 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】根据线面平行、面面平行的判定定理与性质定理证明 A、B、D，延长 DE、CC_1，DE 与 CC_1 交于点 M，即可判断 C；

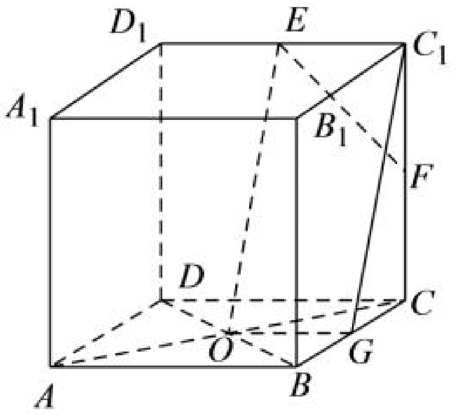
【详解】解：对于 A：取 BC 的中点 G，连接 OG、C_1G，

由正方体的性质可得 $OG//AB$ 且 $OG=\frac{1}{2}AB$，$C_1E//AB$ 且 $C_1E=\frac{1}{2}AB$，

所以 $C_1E//OG$ 且 $C_1E=OG$，所以四边形 OGC_1E 为平行四边形，

所以$OE//C_1G$，因为$OE\not\subset$平面BB_1C_1C，$C_1G\subset$平面BB_1C_1C，

所以$OE//$平面BB_1C_1C，故 A 正确；

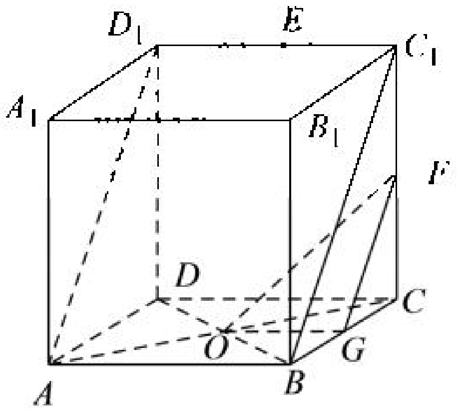


对于 B：连接FG，则$FG//BC_1$，$FG\not\subset$平面ABC_1D_1，$BC_1\subset$平面ABC_1D_1，

所以$FG//$平面ABC_1D_1，同理可证$OG//$平面ABC_1D_1，

又$OG\cap FG=G$，$OG,FG\subset$平面OFG，

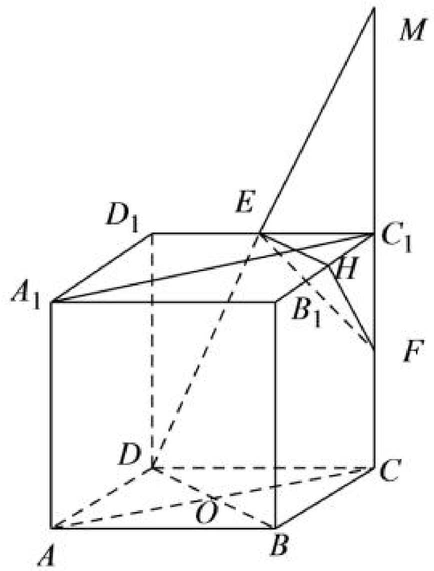
所以平面$OFG//$平面ABC_1D_1，所以$OF//$平面ABC_1D_1，故 B 正确；



对于 C：延长DE、CC_1，DE与CC_1交于点M，

因为$CC_1\subset$平面AA_1C_1C，所以$M\in$平面AA_1C_1C，

又$M\in DE$，所以DE与平面AA_1C_1C不平行，故 C 错误；



对于 D：取 B_1C_1 的中点 H，连接 EH 、 FH，

根据正方体的性质可得 $HE//B_1D_1$ 、 $HF//B_1C$，

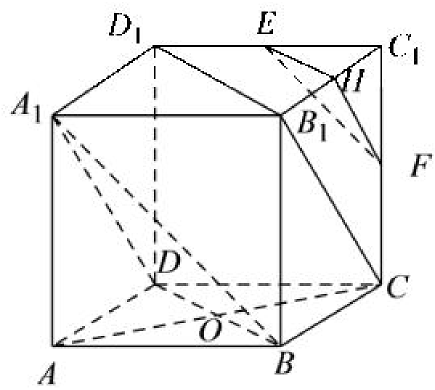
$BD//B_1D_1$ 、 $DA_1//B_1C$，所以 $HE//BD$ 、 $HF//A_1D$，

又 $HE\not\subset$ 平面 A_1BD， $BD\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $HE//$ 平面 A_1BD，同理可得 $HF//$ 平面 A_1BD， $HF\cap HE=H$， $HF,HE\subset$ 平面 HEF，

所以平面 $HEF//$ 平面 A_1BD，

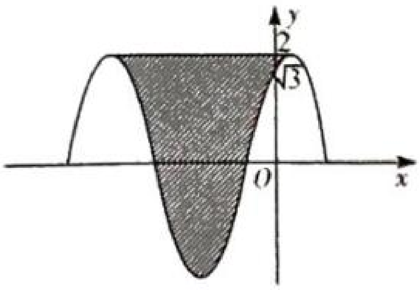
所以 $EF//$ 平面 A_1BD，故 D 正确；



故选：C

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示．其中阴影部分的面积为

2π，则函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上的最小值为（　　）



A. -2　　　　B. $-\sqrt{3}$　　　　C. -1　　　　D. $\frac{1}{2}$

【9 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】由最大值可知 $A=2$，结合 $f(0)=\sqrt{3}$ 可求得 φ；根据正弦型函数的对称性和阴影部分的面积可求得最小正周期 T，进而得到 ω，确定 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；由正弦型函数最值的求解方法可求得最小值.

【详解】由图象知：$f(x)_{\max}=2$，即 $A=2$；

$\because f(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$；

$\because$ 阴影部分的面积为 2π，由对称性可知：两个相邻的最高点与其在 x 轴上的投影构成的矩形的面积为 2π，

即 $2T=2\pi$，$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得：$\omega=2$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$，

则当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=2\sin\frac{7\pi}{6}=-1$.

故选：C.

10. 已知抛物线 $C:x^2=4y$，过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A，B 两点，以 AB 为直径的圆与 x 轴相交于 P，Q 两点，若 $\triangle FPQ$ 的面积不小于 2，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$　　　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【10题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】联立直线l与抛物线方程，根据韦达定理和弦长公式求出以AB为直径的圆的方程，令$y=0$求出P,Q的坐标，得到$|PQ|$，根据三角形面积列式可求出结果.

【详解】依题意得$F(0,1)$，直线$l:y=kx+1$，

联立$\begin{cases}y=kx+1\\x^2=4y\end{cases}$，消去$y$并整理得$x^2-4kx-4=0$，

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，则$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{16k^2+16}=4k^2+4$，

所以以AB为直径的圆的圆心为$(2k,2k^2+1)$，半径为$2k^2+2$，

所以该圆的方程为$(x-2k)^2+(y-2k^2-1)^2=(2k^2+2)^2$，

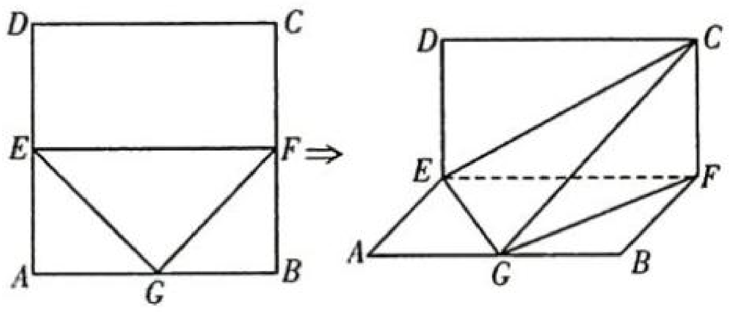
令$y=0$，得$(x-2k)^2+(2k^2+1)^2=(2k^2+2)^2$，得$x=2k+\sqrt{4k^2+3}$或$x=2k-\sqrt{4k^2+3}$，

所以$|PQ|=2\sqrt{4k^2+3}$，所以$\triangle FPQ$的面积为$\frac{1}{2}|PQ|\cdot 1=\sqrt{4k^2+3}$，

依题意得$\sqrt{4k^2+3}\geq 2$，得$k^2\geq\frac{1}{4}$，得$k\leq-\frac{1}{2}$或$k\geq\frac{1}{2}$.

故选：D

11. 在边长为4的正方形$ABCD$中，E，F，G分别为AD，BC，AB的中点，现将矩形$CDEF$沿EF折起，使平面$CDEF$与平面$ABFE$所成的二面角为直二面角，则四面体$CEGF$的外接球的表面积为（　　）



A. 5π　　B. 20π　　C. 40π　　D. 80π

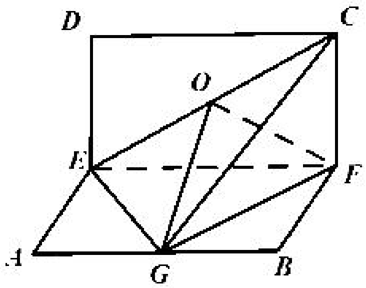
【11 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】取 CE 的中点 O，连 OG,OF，根据面面垂直的性质定理证明 $CF\perp$ 平面 $ABFE$，然后根据直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半可得 O 为四面体 $CEGF$ 的外接球的球心，求出其半径后，利用球的表面积公式可求出结果.

【详解】取 CE 的中点 O，连 OG,OF，如图：



依题意可知 $EG\perp FG$，$CF\perp EF$，

因为平面 $CDEF$ 与平面 $ABFE$ 所成的二面角为直二面角，即平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABFE$，

所以 $CF\perp$ 平面 $ABFE$，所以 $CF\perp BF$，$CF\perp FG$，$CF\perp EG$，

因为 $EG\perp FG$，且 $CF\cap FG=F$，所以 $EG\perp$ 平面 CFG，所以 $EG\perp CG$，

因为 O 为 CE 的中点，所以 $OC=OE=OF=OG$，

所以 O 为四面体 $CEGF$ 的外接球的球心，其半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{16+4}=\sqrt{5}$，

所以其表面积为 $4\pi\cdot(\sqrt{5})^2=20\pi$.

故选：B

12. 已知函数 $f(x)=(2\ln x+1)x$，若对任意的 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $f(x)\geq k\ln x$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,4\sqrt{e}\right]$　　B. $\left(-\infty,4e^2\right]$　　C. $\left(0,4e^2\right]$　　D. $\left[4e^2,+\infty\right)$

【12 题答案】

【答案】A

【解析】

【分析】分离变量可得$k\le g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\ln x}$，利用导数可求得$g\left(x\right)$单调性，从而得到$g\left(x\right)_{\min}=4\sqrt{e}$，由此可得$k$的范围.

【详解】当$x>1$时，$\ln x>0$，$\therefore k\le\dfrac{f\left(x\right)}{\ln x}$恒成立；

令$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\ln x}=2x+\dfrac{x}{\ln x}\left(x>1\right)$，

则$g'\left(x\right)=2+\dfrac{\ln x-1}{\left(\ln x\right)^2}=\dfrac{2\left(\ln x\right)^2+\ln x-1}{\left(\ln x\right)^2}=\dfrac{\left(2\ln x-1\right)\left(\ln x+1\right)}{\left(\ln x\right)^2}$；

则当$\ln x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，即$x\in\left(1,\sqrt{e}\right)$时，$g'\left(x\right)<0$；当$\ln x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，即$x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$；

$\therefore g\left(x\right)$在$\left(1,\sqrt{e}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{e},+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(\sqrt{e}\right)=2\sqrt{e}+\dfrac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}=4\sqrt{e}$，$\therefore k\le 4\sqrt{e}$，

即实数k的取值范围为$\left(-\infty,4\sqrt{e}\right]$.

故选：A.

【点睛】思路点睛：本题考查利用导数求解恒成立问题，求解此类问题的基本思路是通过分离变量的方式将问题转化为$k\ge f\left(x\right)$或$k\le f\left(x\right)$，利用导数求解函数最值，根据$k\ge f\left(x\right)_{\max}$或$k\le f\left(x\right)_{\min}$得到参数范围.

第Ⅱ卷（非选择题共　90分）

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知向量$\vec{a}=\left(3-m,-1\right)$，$\vec{b}=\left(m,-4\right)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$______.

【13题答案】

【答案】$\dfrac{12}{5}$##2.4

【解析】

【分析】根据向量共线的坐标表示可求出结果.

【详解】依题意可得$-4(3-m)+m=0$，解得$m=\dfrac{12}{5}$.

故答案为：$\dfrac{12}{5}$.

14. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}+a\cdot 2^{-x}}{bx^{2}+1}$ 为偶函数，则 $a=$______.

【14 题答案】

【答案】1

【解析】

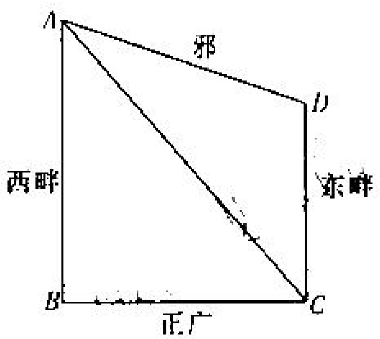
【分析】由偶函数的性质 $f(-x)=f(x)$，即可求参数.

【详解】由题设，$f\left(-x\right)=\dfrac{2^{-x}+a\cdot 2^{x}}{b\left(-x\right)^{2}+1}=\dfrac{2^{-x}+a\cdot 2^{x}}{bx^{2}+1}=f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}+a\cdot 2^{-x}}{bx^{2}+1}$，

所以 $a=1$.

故答案为：1

15. 《九章算术》是中国古代第一部数学专著.《九章算术》中的“邪田”意为直角梯形，上、下底称为“畔”，高称为“正广”，非高腰边称为“邪”．如图所示，邪长为 $4\sqrt{3}$，东畔长为 $2\sqrt{7}$，在 A 处测得 C，D 两点处的俯角分别为 49° 和 19°，则正广长约为______．（注：$\sin 41^{\circ}\approx 0.66$）



【15 题答案】

【答案】6.6

【解析】

【分析】根据余弦定理先求得 AC，再根据直角三角形中的关系求得 BC 即可

【详解】由题可得，$\angle DAC=49^{\circ}-19^{\circ}=30^{\circ}$，在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得 $DC^{2}=AC^{2}+AD^{2}-2AC\cdot AD\cdot\cos 30^{\circ}$，代入得 $28=AC^{2}+48-12AC$，即 $\left(AC-2\right)\left(AC-10\right)=0$，

因为 $\angle ADC>90^{\circ}$，故 $AC=10$，故 $BC=AC\cdot\cos 49^{\circ}=10\cdot\sin 41^{\circ}=6.6$

故答案为：6.6

16. 已知双曲线 $M:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，以线段 F_1F_2 为直径的圆 O 与双曲线 M 在第一象限交于点 A，若 $\tan\angle AF_2F_1\le 2$，则双曲线 M 的离心率的取值范围为______.

【16 题答案】

【答案】$[\sqrt{5},+\infty)$

【解析】

【分析】根据双曲线的定义以及勾股定理求出 $|AF_1|$ 和 $|AF_2|$，再根据 $\tan\angle AF_2F_1\le 2$ 可求出结果.

【详解】依题意可得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，

又 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$，

所以 $(|AF_2|+2a)^2+|AF_2|^2=4c^2$，得 $|AF_2|=-a+\sqrt{2c^2-a^2}$，

所以 $|AF_1|=2a+|AF_2|=a+\sqrt{2c^2-a^2}$，

所以 $\tan\angle AF_2F_1=\dfrac{|AF_1|}{|AF_2|}=\dfrac{a+\sqrt{2c^2-a^2}}{-a+\sqrt{2c^2-a^2}}\le 2$，得 $c^2\geqslant 5a^2$，得 $e\ge\sqrt{5}$.

故答案为：$[\sqrt{5},+\infty)$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某医院为筛查某种疾病，需要检验一项血液指标是否为阳性.

（1）现有 4 份血液样本，其中有 2 份样本为阳性．若采取逐份检验的方式，求恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部找出来的概率；

（2）现有 200 份血液样本送检，该医院打算分别采用甲试剂检验其中的 100 份，采用乙试剂检验另外的 100 份，检验结果如下表：

	使用甲试剂	使用乙试剂	合计
阴性	80	85	165
阳性	20	15	35
合计	100	100	200

根据上面的列联表判断，是否有 90% 的把握认为检验结果与使用甲、乙试剂的选择有关．

附：

$P\left(K^2 \geq k_0\right)$	0.15	0.10	0.050	0.025
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

【17 题答案】

【答案】（1）$\dfrac{1}{6}$

（2）没有90%的把握认为检验结果与使用甲、乙试剂的选择有关.

【解析】

【分析】（1）根据独立事件概率乘法公式直接求解即可；

（2）根据列联表数据可求得 $K^2 \approx 0.866 < 2.706$，对比临界值表可得结论.

【小问 1 详解】

恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部找出来的概率 $p=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

【小问 2 详解】

由列联表数据计算可得：$K^2=\dfrac{200\times(80\times15-85\times20)^2}{100\times100\times165\times35}\approx0.866<2.706$，

$\therefore$没有90%的把握认为检验结果与使用甲、乙试剂的选择有关.

19. 在正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$\dfrac{a_{n+1}-3}{a_n+3}=\dfrac{a_n-1}{a_{n+1}+1}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$，且数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，证明：$T_n>\dfrac{2n-1}{4n}$.

【19 题答案】

【答案】（1）$a_n=2n$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由 $\dfrac{a_{n+1}-3}{a_n+3}=\dfrac{a_n-1}{a_{n+1}+1}$ 得 $a_{n+1}-a_n=2$，根据等差数列的通项公式可求出结果；

（2）利用裂项求和法求出T_n，再作差比较可证不等式成立.

【小问 1 详解】

由$\dfrac{a_{n+1}-3}{a_n+3}=\dfrac{a_n-1}{a_{n+1}+1}$得$(a_{n+1}-3)(a_{n+1}+1)=(a_n+3)(a_n-1)$,

得$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$,

因为$\{a_n\}$为正项数列,所以$a_{n+1}+a_n>0$,

所以$a_{n+1}-a_n=2$,

所以$a_n=a_1+(n-1)\cdot 2=2n$.

【小问 2 详解】

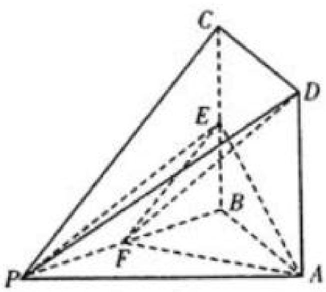
$b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

所以$T_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$，

因为$\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{2n-1}{4n}=\dfrac{4n^2-(2n+1)(2n-1)}{4n(2n+1)}=\dfrac{1}{4n(2n+1)}>0$，

所以$T_n>\dfrac{2n-1}{4n}$.

21. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PB\perp AB$，$AD\perp$平面PAB，$BC\perp$平面PAB，E为BC的中点，F为PB上一点，且$PB=4$，$AB=2$，$BC=AD=2\sqrt{2}$.



（1）求证：$AE\perp DF$；

（2）若直线DF与平面PAB所成的角为45°，求三棱锥$P-AEF$的体积.

【21 题答案】

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【解析】

【分析】（1）由线面垂直的性质有 $BC \perp PB$，再由线面垂直的判定和性质可得 $FB \perp AE$，连接 BD 结合 $Rt\triangle ABE$： $Rt\triangle DAB$ 可得 $BD \perp AE$，最后由线面垂直的判定、性质证结论.

（2）由已知有直线 DF 与平面 PAB 所成的角 $\angle DFA = 45°$，由 $V_{P-AEF}=V_{E-PAF}$，根据已知条件及三棱锥的体积更多试卷微信搜<高三答案公众号>公式求体积.

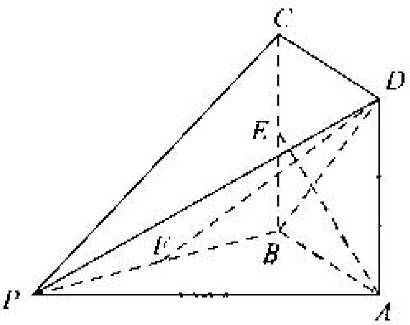
【小问 1 详解】

由 $BC \perp$ 平面 PAB，$PB \subset$ 面 PAB，则 $BC \perp PB$，又 $PB \perp AB$，

由 $BC \text{I} AB = B$，则 $PB \perp$ 面 $ABCD$，$AE \subset$ 面 $ABCD$，

所以 $PB \perp AE$，即 $FB \perp AE$，

连接 BD，又 E 为 BC 的中点，则 $BE=\sqrt{2}$，



所以在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle DAB$ 中 $\frac{BE}{AB}=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $Rt\triangle ABE$： $Rt\triangle DAB$，

所以 $\angle ABD + \angle BAE = 90°$，故 $BD \perp AE$，

由 $FB \cap BD = B$，则 $AE \perp$ 面 FBD，$DF \subset$ 面 FBD，故 $AE \perp DF$.

【小问 2 详解】

由 $AD \perp$ 平面 PAB，则直线 DF 与平面 PAB 所成的角 $\angle DFA = 45°$，

所以 $AF = 2\sqrt{2}$，又 $PB \perp AB$，$AB = 2$，则 $BF = 2$，而 $PB = 4$，故 $PF = 2$，

所以 $S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$，由 E 为 BC 的中点，$BC \perp$ 平面 PAB，故 E 到面 PAF 的距离为 $\sqrt{2}$，

则三棱锥 $P-AEF$ 的体积 $V_{P-AEF}=V_{E-PAF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

23. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$为椭圆$C$上一点，过焦点$F_1$的动直线$l$与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，且右焦点$F_2$到直线$l$的最大距离为2.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）设$P(t,0)(t>-1)$，且$|AB|=4|PF_1|$，证明：$|PA|=|PB|$.

【23题答案】

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据右焦点F_2到直线l的最大距离为2，求出$c=1$，根据M在椭圆上，得$\frac{4}{3a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，结合$a^2-b^2=1$可求出$a^2$和$b^2$，从而可得椭圆的标准方程；

（2）利用直线l的方程与椭圆方程联立，根据弦长公式求出$|AB|$，由$|AB|=4|PF_1|$求出t，再利用t的值，得到$|PA|^2-|PB|^2=0$，即可得证.

【小问1详解】

因为右焦点F_2到直线l的最大距离为2，所以$2c=2$，所以$c=1$，

依题意得$\frac{4}{3a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，因为$a^2-b^2=c^2=1$，

所以$\frac{4}{3a^2}+\frac{2}{a^2-1}=1$，解得$a^2=4$或$a^2=\frac{1}{3}$（舍去），

所以$b^2=a^2-1=3$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问2详解】

当直线l的斜率不存在时，根据对称性可知，$|PA|=|PB|$；

当直线l的斜率存在时，设$l:y=k(x+1)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去$y$并整理得$(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\dfrac{64k^4}{(3+4k^2)^2}-\dfrac{4(4k^2-12)}{3+4k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}=\dfrac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$，

$|PF_1|=t+1$，所以 $4(t+1)=\dfrac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$，所以 $t=-\dfrac{k^2}{3+4k^2}$，

所以 $|PA|^2=(x_1-t)^2+y_1^2=x_1^2-2tx_1+t^2+3(1-\dfrac{x_1^2}{4})=\dfrac{1}{4}x_1^2-2tx_1+t^2+3$，

同理 $|PB|^2=\dfrac{1}{4}x_2^2-2tx_2+t^2+3$，

所以 $|PA|^2-|PB|^2=\dfrac{1}{4}(x_1^2-x_2^2)-2t(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left[\dfrac{1}{4}(x_1+x_2)-2t\right]$

$=(x_1-x_2)(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}-2\cdot\dfrac{-k^2}{3+4k^2})=0$，

所以 $|PA|=|PB|$，

综上所述：$|PA|=|PB|$

25. 已知函数 $f(x)=x-a(e^x-1)$，其中 e 为自然对数的底数，$a\in\mathbf{R}$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 $g(x)=e^x f(x)$，当 $a=1$ 时，证明：函数 $g(x)$ 有且仅有一个极小值点 x_0，且 $-\dfrac{1}{4}<g(x_0)<-\dfrac{1}{e^2}$．

【25 题答案】

【答案】（1）答案见解析；

（2）证明见解析．

【解析】

【分析】（1）讨论 $a=0$、$a\neq 0$，利用导数研究 $f(x)$ 的单调区间即可．

（2）对 $g(x)$ 求导并构造 $h(x)=x+2-2e^x$，利用导数研究 $h(x)$ 的符号即确定 $g'(x)$ 的符号，可得 $g(x)$ 的

单调区间，可证极小值点的唯一性并确定其范围，再由 $g(x_0)<g(-1)$ 、$x_0+2=2e^{x_0}$ 及二次函数的性质求证不等关系.

【小问 1 详解】

当 $a=0$ 时，$f(x)=x$ 在 R 上递增；

当 $a\neq 0$ 时有 $f'(x)=1-ae^x$，

若 $a<0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 R 上递增；

若 $a>0$，则 $(-\infty,-\ln a)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；$(-\ln a,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；

综上，$a\le 0$ 时 $f(x)$ 的单调增区间为 R，无减区间；

$a>0$ 时 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-\ln a)$，单调减区间为 $(-\ln a,+\infty)$.

【小问 2 详解】

由题设，$g(x)=e^x(x+1-e^x)$，则 $g'(x)=e^x(x+2-2e^x)$，

令 $h(x)=x+2-2e^x$，则 $h'(x)=1-2e^x$，

所以 $(-\infty,-\ln 2)$ 上 $h'(x)>0$，$h(x)$ 递增；$(-\ln 2,+\infty)$ 上 $h'(x)<0$，$h(x)$ 递减；

又 $h(-2)=-\frac{2}{e^2}<0$，$h(-1)=1-\frac{2}{e}>0$，$h(-\ln 2)=1-\ln 2>0$，$h(0)=0$，

所以 $h(x)$ 有两个零点分别为 $x_1\in(-2,-1), x_2=0$，且 $x_1+2=2e^{x_1}$，

即 $(-\infty,x_1)$、$(0,+\infty)$ 上 $h(x)<0$，$(x_1,0)$ 上 $h(x)>0$，

则在 $(-\infty,x_1)$、$(0,+\infty)$ 上 $g'(x)<0$，在 $(x_1,0)$ 上 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上递减，$(x_1,0)$ 上递增，$(0,+\infty)$ 上递减，

则有且仅有一个极小值点 $x_0=x_1$，且 $g(x_0)<g(-1)=-\frac{1}{e^2}$，

令 $t=\frac{x_0}{2}\in(-1,-\frac{1}{2})$ 且 $x_0+2=2e^{x_0}$，$\varphi(t)=g(x_0)=\frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2}+1)=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>-\frac{1}{4}$，

综上，$-\frac{1}{4}<g\left(x_0\right)<-\frac{1}{e^2}$.

【点睛】关键点点睛：第二问，对 $g(x)$ 求导，构造中间函数研究单调性，进而判断 $g'(x)$ 的符号求 $g(x)$ 的单调区间，得到极小值点及其范围，结合极小值点的性质和范围及 $g(x)$ 的单调性求证不等式.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22~23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一

题计分.

选修 4-4：坐标系与参数方程

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的圆心为 $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为 3 .

（1）求直线 l 和圆 C 的极坐标方程；

（2）若直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，求 $\sin^2\angle OBA+\sin^2\angle OAB$ 的值.

【27 题答案】

【答案】（1）直线 $l:\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$；圆 $C:\rho=6\sin\theta$

（2）$\dfrac{4}{3}$

【解析】

【分析】（1）将直线 l 参数方程化为普通方程；将圆 C 的直角坐标方程求解出来；根据极坐标与直角坐标互化方法即可得到所求极坐标方程；

（2）利用正弦定理和圆 C 极坐标方程可将所求值转化为 $\sin^2\theta_A+\sin^2\theta_B$ 的求解；将直线 l 和圆 C 的极坐标方程联立后，整理可得关于 $\sin^2\theta$ 的一元二次方程的形式，利用韦达定理可求得结果.

【小问 1 详解】

由直线 l 的参数方程可得其普通方程为：$x+y=5$，

$\therefore$ 直线 l 的极坐标方程为：$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=5$，

即 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$；

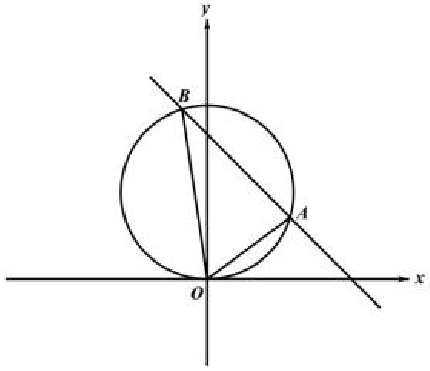
$\because$ 圆 C 的圆心为 $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$，即直角坐标系中的 $(0,3)$，半径 $r=3$，

$\therefore$ 圆 C 的直角坐标方程为：$x^2+(y-3)^2=9$，即 $x^2+y^2=6y$，

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为：$\rho^2=6\rho\sin\theta$，即 $\rho=6\sin\theta$.

【小问 2 详解】

设 $A(\rho_A,\theta_A)$，$B(\rho_B,\theta_B)$，



在 $\triangle OAB$ 中，由正弦定理得：$\dfrac{\rho_A}{\sin\angle OBA}=\dfrac{\rho_B}{\sin\angle OAB}=6$，

$\therefore \sin^2\angle OBA=\dfrac{\rho_A^2}{36}$，$\sin^2\angle OAB=\dfrac{\rho_B^2}{36}$，

又 $\rho_A=6\sin\theta_A$，$\rho_B=6\sin\theta_B$，$\therefore \sin^2\angle OBA=\sin^2\theta_A$，$\sin^2\angle OAB=\sin^2\theta_B$；

由 $\begin{cases}\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\\ \rho=6\sin\theta\end{cases}$ 得：$6\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore 6\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=6\sin\theta\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，

整理可得：$6\sin\theta\cos\theta=5-6\sin^2\theta$，$\therefore 36\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=25-60\sin^2\theta+36\sin^4\theta$，

即 $72\sin^4\theta-96\sin^2\theta+25=0$，$\therefore \sin^2\theta_A+\sin^2\theta_B=\dfrac{96}{72}=\dfrac{4}{3}$，

即 $\sin^2\angle OBA+\sin^2\angle OAB=\dfrac{4}{3}$.

选修 4-5：不等式选讲

29. 已知函数 $f(x)=|2x-a|-|x+a|(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>0$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\geq a^2-3|x+a|+2$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【29 题答案】

【答案】（1）$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

（2）$-2\leq a\leq -1$ 或 $1\leq a\leq 2$

【解析】

【分析】（1）代入$a=1$，分类讨论去绝对值求解即可；

（2）化简可得$|2x-a|+|2x+2a|\geq a^{2}+2$，再根据绝对值不等式求解$|2x-a|+|2x+2a|$的最小值，再求解不等式即可

【小问 1 详解】

代入$a=1$有$f(x)=|2x-1|-|x+1|$，

当$x<-1$时，有$-(2x-1)+(x+1)>0$，解得$x<2$，此时有$x<-1$；

当$-1\leq x\leq\frac{1}{2}$时，有$-(2x-1)-(x+1)>0$，解得$x<0$，此时有$-1\leq x<0$；

当$x>\frac{1}{2}$时，有$(2x-1)-(x+1)>0$，解得$x>2$，此时有$x>2$；

综上更多试卷微信搜<高三答案公众号>可得解集为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【小问 2 详解】

由题可得$|2x-a|-|x+a\geq a^{2}-3x+a|+2$，即$|2x-a|+|2x+2a|\geq a^{2}+2$，由绝对值的三角不等式可得

$|2x-a|+|2x+2a|\geq|(2x-a)-(2x+2a)|=|3a|$，故要$|2x-a|+2x+2a|\geq a^{2}+2$恒成立则$a^{2}+2\leq|3a$，

故$(|a|-2)(|a|-1)\leq 0$，即$1\leq|a|\leq 2$，解得$-2\leq a\leq -1$或$1\leq a\leq 2$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线