白卷·数学

参考答案及评分标准

评分标准

一、选择题(共40分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	B	D	C	B	A	D

每小题5分,与答案不符的均不给分。

二、选择题(共20分)

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	BD	ACD

每小题5分,有多项符合要求,全部选对得5分,部分选对得2分,有选错得0分。

三、填空题(共20分) 每小题5分,与答案不符的均不给分。

13. $\frac{1}{2}$　　14. $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right)$

15. $x=4$(满足 $x=my+4,-2\sqrt{3}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{3}$ 即可)　　16. $(e^4,+\infty)$

四、解答题(共70分)来源:高三答案公众号

17. 解:(1)因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,(2分)　正确化简 $f(x)$ 得2分

所以 $f(x)$ 的最大值为2,最小值为-2.(3分)　正确求得 $f(x)$ 的最值得1分

(2)结合(1)可知 $f(A)=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=2$,所以 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$.

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$,

则 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,$A=\frac{\pi}{3}$.(6分)　正确求解 A 的值得3分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+c^2-a^2}{4c}=\frac{1}{2}$,

化简得 $a^2=c^2-2c+4$①.

又 $2\sin B+\sin C=\sqrt{7}\sin A$,由正弦定理可得 $2b+c=\sqrt{7}a$,

即 $4+c=\sqrt{7}a$②.(8分)　正确求得 a,c 间关系得2分

结合①②得 $a=\sqrt{7},c=3$ 或 $a=\frac{2\sqrt{7}}{3},c=\frac{2}{3}$.(9分)　正确求得 a,c 的值得1分

$c=3$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;$c=\frac{2}{3}$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.(10分)　正确求得 $\triangle ABC$ 的面积得1分

18. 解:(1)当 $n=1$ 时,$a_1b_2-a_1=2b_1$,

又 $b_1=2,b_2=3$,解得 $a_1=2$.(2分)　正确利用特殊值代入法计算 a_1 得2分

所以 $\{a_n\}$ 是以2为首项,2为公比的等比数列,

故 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.(4分)　正确求解 $\{a_n\}$ 的通项公式得2分

则 $2^nb_{n+1}-2^n=2^nb_n$,即 $b_{n+1}=b_n+1$.

所以$\{b_n\}$是以 2 为首项,1 为公差的等差数列,

故 $b_n=2+(n-1)\times1=n+1$. (6 分)

正确利用 b_n 与 b_{n+1} 的关系式求解$\{b_n\}$的通项公式得 2 分

(2)由(1)可得 $a_n=2^n$, $b_n=n+1$,所以$\frac{b_n}{a_n}=\frac{n+1}{2^n}$.

则 $S_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$①, 来源: 高三答案公众号

$\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}$②, (8 分)

正确利用$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式得到 S_n 及$\frac{1}{2}S_n$ 的表达式得 2 分

①-②可得$\frac{1}{2}S_n=1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$$=1+\frac{\frac{1}{2^2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}},$$

所以 $S_n=3-\frac{n+3}{2^n}<3$. (10 分)

正确利用错位相减法求得 S_n 的表达式及范围得 2 分

因为 $S_{n+1}-S_n=3-\frac{n+4}{2^{n+1}}-3+\frac{n+3}{2^n}=\frac{n+2}{2^{n+1}}>0$,所以$\{S_n\}$是递增数列.

则 $S_n\geqslant S_1=3-\frac{1+3}{2}=1$,故 $1\leqslant S_n<3$. (12 分)

正确求解 S_n 的取值范围,证明不等式得 2 分

19. 解:由题可得 $AD=2$, $CD=DD_1=3$,

又点 P 为 AB 上靠近 A 的三等分点,所以 $AP=1$.

在$\triangle ADP$ 中,由余弦定理可得,

$DP^2=AD^2+AP^2-2AD\cdot AP\cdot\cos\angle DAP=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$,

故 $AD^2=4=AP^2+DP^2$,

所以$\triangle ADP$ 为直角三角形,故 $DP\perp AB$. (2 分)

正确得到垂直关系作为建立空间直角坐标系的依据得 2 分

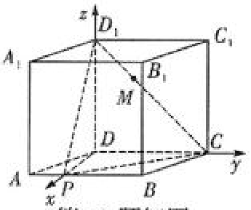
因为底面 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $DP\perp CD$.

由直四棱柱性质可知 $DD_1\perp DP$, $DD_1\perp CD$,

即 DP, CD, DD_1 两两垂直.

建立空间直角坐标系前应先说明建系依据,未说明扣 1 分

故以 D 为坐标原点,分别以 DP, DC, DD_1 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.



第 19 题解图

则 $D(0,0,0)$, $P(\sqrt{3},0,0)$, $D_1(0,0,3)$, $M(0,1,2)$. (4 分)

正确建立空间直角坐标系并得到相应点的坐标得 2 分

(1)因为 $\overrightarrow{PD_1}=(-\sqrt{3},0,3)$,过点 M 作 $ME\perp PD_1$,(点到直线的距离即为通过该点向直线做垂线,点到垂足的距离)

令 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD_1}=(-\sqrt{3}\lambda,0,3\lambda)$,所以 $E(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0,3\lambda)$,

故 $\overrightarrow{ME}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,-1,3\lambda-2)$. (6 分)

正确表示出 $\overrightarrow{ME}$ 得 2 分

由 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{PD_1}=-3+3\lambda+9\lambda-6=0$,

解得 $\lambda=\frac{3}{4}$,所以 $\overrightarrow{ME}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-1,\frac{1}{4}\right)$,

故点 M 到直线 PD_1 的距离为 $|\overrightarrow{ME}|=\sqrt{\frac{3}{16}+1+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. (8 分)

正确利用向量的模计算点 M 到直线 PD_1 的距离得 2 分

(2) 因为 $\overrightarrow{DP}=(\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{D_1M}=(0,1,-1)$, $\overrightarrow{PD_1}=(-\sqrt{3},0,3)$,

设平面 PCD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, 来源：高三答案公众号

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1M}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ -\sqrt{3}x+3z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$, 得 $y=1$, $z=1$, 故 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$. (10 分)

正确计算平面 PCD_1 法向量得 2 分

设直线 PD 与平面 PCD_1 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DP}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}\right|=\frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线 PD 与平面 PCD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. (12 分)

正确计算直线 PD 与平面 PCD_1 所成角的正弦值得 2 分；没有回归设问扣 1 分

20. 解：(1) 因为 $\bar{x}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$,

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$,

对于模型 $y=a+bx$, 相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}$

$\approx\frac{132}{2\sqrt{7}\times25}\approx0.996$, (2 分)

正确利用已知数据及公式计算模型 $y=a+bx$ 的相关系数得 2 分

对于模型 $y=c+dx^2$, 相关系数 $r'=\frac{\sum_{i=1}^{7}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(w_i-\bar{w})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}$

$\approx\frac{1048}{43.3\times25}\approx0.968$,

因为 $0.996>0.968$,

所以 $y=a+bx$ 适宜作为平均收入 y 关于年份代码 x 的回归方程. (4 分)

正确判断回归方程类型得 2 分；没有回归设问扣 1 分

(2) 由 (1) 可知回归方程类型为 $y=a+bx$,

由已知数据及公式可得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{132}{28}=\frac{33}{7}\approx4.71$,

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{480}{7}-\frac{33}{7}\times4\approx49.71$, (6 分)

正确计算 a,b 得 2 分

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=4.71x+49.71$,

又年份代码 1-7 分别对应年份 2016-2022,

所以 2023 年对应年份代码为 8,

代入可得 $\hat{y}=4.71\times8+49.71=87.39$ 千元, 所以预测 2023 年该农户种植药材的平均收入为 87.39 千元. (8 分)

正确预测 2023 年该农户种植药材的平均收入得 2 分；没有回归设问扣 1 分

(3) 长期在固定的土地种植固定的药材, 土壤的微量元素含量及比例会发生变化, 影响药材的生长, 产量、质量方面等出现问题;

长期种植同种药材,品种较为单一,市场也会趋于饱和,影响收入.(10分)

合理分析收入"瓶颈"原因得2分

故建议如下:来源:高三答案公众号

①扩大种植面积,调整种植品种,进行土壤元素分析,结合当地环境及农作物的种植,进行综合研判,进行套种或轮作;

②增加药材品种,聘请专家指导每块土地药材种植的次序及间隔时间等,采用多元化种植方式,也可根据药材的特性,因地制宜选择种植品种.(以上给出了1种示例,回答合理即可得分)(12分)

合理给出建议得2分

21. 解:(1)$f'(x)=xe^x-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$,令$g(x)=x^2e^x-a(x>0)$,

则$g'(x)=(x^2+2x)e^x>0$,

所以函数$g(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增,(2分)

正确判断$g(x)$单调性得2分

易得$g(x)=x^2e^x-a>x^2-a(x>0)$,

当$a>0$时,$g(\sqrt{a})>(\sqrt{a})^2-a=0$,且$g(0)=-a<0$,

所以存在唯一实数$x_0\in(0,\sqrt{a})$,

使得$g(x_0)=0$,即$x_0^2e^{x_0}=a$,(4分)

正确利用零点存在定理判断$g(x)$的零点得2分

当$x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

故$f(x)$存在唯一的极小值点.(5分)

正确利用$f(x)$的单调性证明结论得1分

(2)当$a<0$时,$f'(x)=xe^x-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x-a}{x}>0,x>0$,

所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,

又$f(1)=0$,所以$f(x)$存在唯一零点1,不符合题意;

当$a=0$时,$f(x)=(x-1)e^x$,

故$f(x)$存在唯一零点1,不符合题意;(7分)

正确判断$a\leqslant0$时,函数$f(x)$的零点个数得2分

当$a>0$时,$f(1)=0$,由(1)知,x_0为函数$f(x)$的极小值点,

①当$x_0>1$,即$a>e$时,$f(x)$在区间$(1,x_0)$单调递减,(由(1)可得$x_0^2e^{x_0}=a$,且易知$y=x^2e^x$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以当$x_0>1$时,$a>e$)

所以$f(x_0)<f(1)=0$,取$\ln a>1$,

则$f(\ln a)=(\ln a-1)e^{\ln a}-a\ln(\ln a)>(\ln a-1)(e^{\ln a}-a)=0$,

所以$f(x)$在区间$(x_0,\ln a)$有一个零点,

故$f(x)$有两个零点,满足题意;(9分)

正确判断$a>e$时,函数$f(x)$的零点个数得2分

②当$x_0=1$,即$a=e$时,$f(x)_{min}=f(x_0)=0$,

所以$f(x)$有且仅有一个零点,不符合题意;

③当$0<x_0<1$,即$0<a<e$时,显然$f(x_0)<0$,

易知函数$y=(x-1)e^x$在区间$(0,+\infty)$上单调递增,

所以$(x-1)e^x>-1$,所以$f(x)>-1-a\ln x$,

取$x_1=e^{-\frac{1}{a}}<1$,则$f(x_1)=f(e^{-\frac{1}{a}})>-1-a\ln e^{-\frac{1}{a}}=0$,

所以$f(x)$在区间(x_1,x_0)有一个零点,

故$f(x)$有两个零点,满足题意.(11分)

正确判断$0<a\leqslant e$时,函数$f(x)$的零点个数得2分

综上,a的取值范围是$(0,e)\cup(e,+\infty)$.(12分)

22. 解：(1) 当 $AF_1\perp x$ 轴时，$|AF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}$，即 $b^2=\frac{1}{2}a$①，

当 $|AF_1|=2$ 时，$|AF_2|=2a-2$，

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，由余弦定理可知，

$|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2=2|AF_1||AF_2|\cos\angle F_1AF_2$，(2 分)

在 $\triangle AF_1F_2$ 中正确利用余弦定理表示三边关系得 2 分

即 $2^2+(2a-2)^2-(2c)^2=2\times2\times(2a-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

整理可得 $a^2-c^2-a+1=0$，即 $b^2=a-1$②，来源：高三答案公众号

由①②解得 $a=2,b=1$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (4 分)

正确得到椭圆 C 的方程得 2 分

(2) 设直线 $l:x+y=m$，点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

令 $x=1$，则 $\frac{1}{4}+y^2=1$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由于点 M,N 在直线 $x=1$ 的两侧，则 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

联立 $\begin{cases}x+y=m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 可得 $5y^2-2my+m^2-4=0$，

则 $\Delta=4m^2-20(m^2-4)=16(5-m^2)>0$ 恒成立，

所以 $y_1+y_2=\frac{2m}{5}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4}{5}$. (6 分)

正确得到交点纵坐标的关系式得 2 分

因为 $|MP|\cdot|NQ|=|MQ|\cdot|NP|$，所以 $\frac{|MP|}{|MQ|}=\frac{|NP|}{|NQ|}$，(将弦长之积转化为同一点出发的线段长度之比)

由正弦定理得 $\frac{\sin\angle MQP}{\sin\angle MPQ}=\frac{\sin\angle NQP}{\sin\angle NPQ}$，

所以 $\angle MPQ=\angle NPQ$，所以 $k_{MP}+k_{NP}=0$. (8 分)

正确转化已知条件得到直线斜率之和为 0 得 2 分

即 $\frac{y_1-t}{x_1-1}+\frac{y_2-t}{x_2-1}=0$，即 $\frac{y_1-t}{-y_1+m-1}+\frac{y_2-t}{-y_2+m-1}=0$，

即 $-2y_1y_2+(m+t-1)(y_1+y_2)-2(m-1)t=0$，

整理得 $4-m-4mt+5t=0$，

所以 $(4m-5)t=4-m$，

因为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $4-m>0$，

又 $t=\frac{4-m}{4m-5}>0$，所以 $\frac{5}{4}<m<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $d=\frac{|1+t-m|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1+\frac{4-m}{4m-5}-m\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-4m^2+8m-1}{4m-5}\right)$. (10 分)

正确得到点 P 到直线 l 的距离 d 的表达式得 2 分

令 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-4m^2+8m-1}{4m-5}\right)=\sqrt{2}$，

又 $\frac{5}{4}<m<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $m=\frac{3}{2}$，故 $t=\frac{4-\frac{3}{2}}{4\times\frac{3}{2}-5}=\frac{5}{2}$.

所以 $t=\frac{5}{2}$ 时，点 P 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{2}$. (12 分)

正确计算 t 的值并回归设问得 2 分

详解详析

1. 因为 $\bar{z}=\frac{2i-1}{1+i}=\frac{(2i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

所以 $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

2. 因为 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x<5\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$，

$A=\{-1,0,1\}$，

$A\cap B=\varnothing$，所以 $B=\{2,3,4\}$.

3. 由数据可得，从第三项开始，第 i 项是前两项之积，

[难点]该组数据均为同底数幂，故以指数函数的运算性质作为切入点，寻求数据的规律.

即 $b_1=b_2=e$，$b_{n+2}=b_nb_{n+1}$，

取对数得 $\ln b_1=\ln b_2=1$，$\ln b_{n+2}=\ln b_n+\ln b_{n+1}$，

设 $a_n=\ln b_n$，则 $a_1^2=a_2a_1$，

$a_2^2=a_2(a_3-a_1)=a_2a_3-a_2a_1$，

$a_3^2=a_3(a_4-a_2)=a_3a_4-a_2a_3$，…，

$a_{20}^2=a_{20}(a_{21}-a_{19})=a_{20}a_{21}-a_{20}a_{19}$，

累加得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{20}^2=a_{20}a_{21}$，

所以 $(\ln b_1)^2+(\ln b_2)^2+\cdots+(\ln b_{20})^2=\ln b_{20}\ln b_{21}$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{20}(\ln b_i)^2=\ln b_{20}\ln b_{21}$.

4. 因为 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，

[易错]容易忽略 $2\sin\alpha\cos\alpha$ 的系数 2 错误地得到 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}$ 而误选 B.

所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$.

又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{8}$，

故 $\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{7}$.

所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{8}\times7=\frac{21}{8}$.

5. 当 $x>0$ 时，令 $\frac{1}{x}-\sqrt{x}=0$，

解得 $x=1$，即 $\gamma=1$；

当 $x\leqslant0$ 时，

方程 $ax^2+2ax+3=0$ 有两个不等负实根 α,β，

所以 $\begin{cases}\Delta=4a^2-12a>0,\\ \alpha+\beta=-2<0,\\ \alpha\beta=\frac{3}{a}>0,\end{cases}$ 解得 $a>3$，

又 $-2<\alpha<-1<\beta<0<\gamma=1$，

[难点]当 $\alpha=\beta=-1$ 时，$\alpha+\beta=-2$，又 $\alpha<\beta<0$，则 $-2<\alpha<-1<\beta<0$.

所以 $\ln\alpha\beta=\ln\frac{3}{a}<0=\gamma-1$.

6. $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_n^r\left(\frac{1}{x}\right)^{n-r}\cdot$

$(\sqrt{x})^r=C_n^rx^{\frac{3r}{2}-n}$，

因为 $r\in\mathbf{N}$，所以当 $r=0,2,4,6,8,10,\cdots$ 时，

展开式中项的次数为整数，

又展开式中项的次数为整数的有且仅有 5 项，

所以 $n=9$，故 $T_{r+1}=C_9^rx^{\frac{3r}{2}-9}$，令 $\frac{3r}{2}-9=0$，

解得 $r=6$，所以其常数项为第 7 项.

[易错]容易忽略项数为 $r+1$ 而误选 C.

7. **审题指导**

$f(1-2x)-f(1+2x)=-4x\longrightarrow$ 构造函数 $g(x)$

$f(-2x)+f(2x)=0\longrightarrow f(x)$ 的奇偶性

所求函数值 $\longleftarrow g(x)$ 奇偶性及周期

第 1 步：判断函数 $f(x)$ 的奇偶性

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(-2x)+f(2x)=0$，

即 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(0)=0$.

第 2 步：构造函数 $g(x)$ 并求其对称轴及周期

由 $f(1-2x)-f(1+2x)=-4x$ 得，

$f(1-x)-f(1+x)=-2x$，

即 $f(1-x)-(1-x)=f(1+x)-(1+x)$，

设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 为奇函数，

$g(0)=0$，且 $g(1-x)=g(1+x)$，

所以 $g(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $g(x)$ 的周期为 4.

第 3 步：利用对称轴及周期求函数值

所以 $g(10)=g(2)=g(0)=0$，

所以 $f(10)=g(10)+10=10$，

由对称性可知 $g(x)$ 图象关于直线 $x=-1$ 对称，

且 $g'(x)$ 的周期为 4，

故 $g'(-1)=0$，所以 $g'(11)=g'(-1)=0$，

[难点]因为函数 $g(x)$ 图象关于直线 $x=-1$ 对称，则函数 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，所以 $g'(-1)=0$.

又 $g'(x)=f'(x)-1$，

所以 $f'(11)=g'(11)+1=1$,

所以 $f(10)+f'(11)=11$.

8. **第1步:判断 OA 与 SB 的位置关系**

如图,取 AC 的中点 E,BC 的中点 F,

连接 AF,BE,设 AF 与 BE 的交点为 O,连接 OM,

则 O 为 $\triangle ABC$ 外心,E 为 $\triangle SAC$ 外心,

因为平面 $SAC\perp$ 平面 ABC,

所以 O 为三棱锥 $S\text{-}ABC$ 外接球球心,

因为 $SE\perp AC$,$BE\perp AC$,$SE\cap BE=E$,

所以 $AC\perp$ 平面 SBE,

又 $SB\subset$ 平面 SBE,所以 $AC\perp SB$,

因为 $AC\cap OA=A$,所以 OA 不垂直于 SB;

第2步:判断平面 OAM 与平面 SBC 的位置关系

因为 $AM\perp BC$,$AF\perp BC$,$AM\cap AF=A$,

所以 $BC\perp$ 平面 AMF,来源:高三答案公众号

又 $BC\subset$ 平面 SBC,

所以平面 $OAM\perp$ 平面 SBC;

第3步:判断直线 OM 与平面 SAC 的位置关系

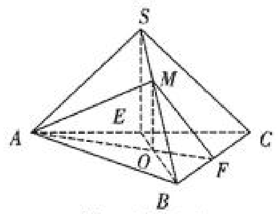
因为 $AC\perp$ 平面 SBE,所以 $AC\perp OM$,

因为 $BC\perp$ 平面 AMF,所以 $BC\perp OM$,

又 $AC\cap BC=C$,所以 $OM\perp$ 平面 ABC,

又 $SE\perp$ 平面 ABC,所以 $OM/\!/SE$,

所以直线 $OM/\!/$平面 SAC.



第8题解图

9. **A项**:由图象可得 $\frac{3}{4}T=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3\pi}{4}$,

解得 $T=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,

将 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ 代入可得 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$,

解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,**A 正确**;

B项:当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f(x)$ 单调递增,

$\left[\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]\not\subset\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,**B 错误**;

C项:令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

[易错]容易混淆正、余弦函数的对称轴方程,漏选 C.

解得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

当 $k=-1$ 时,$x=-\frac{\pi}{3}$,**C 正确**;

D项:$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位,得到

$y=2\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=-2\sin 2x\neq g(x)$,**D 错误**.

10. **A项**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

且 $f(-x)=\frac{e^{|-x|}}{(-x)^2}=\frac{e^{|x|}}{x^2}=f(x)$,

故函数 $f(x)$ 为偶函数,**A 正确**;

B项:由 A 项可得 $f(x)$ 为偶函数,

则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 的最值相等,

[难点]偶函数图象关于 y 轴对称,故对称轴任意一侧最值即为函数的最值.

故只需求 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的最值即可.

当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{e^x}{x^2}$,$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

所以当 $0<x<2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=\frac{e^2}{4}$,**B 正确**;

C项:由 A,B 项可得,$f(x)$ 为偶函数,

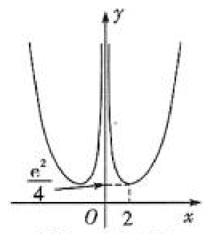
当 $x>0$ 时,$f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 单调递减,

在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增,且最小值为 $\frac{e^2}{4}$,

又 $x\to0^+$ 时,$f(x)\to+\infty$,

$x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,

所以 $f(x)$ 的大致图象如图所示,



第10题解图

所以函数 $g(x)$ 有四个零点,**C 错误**;

D项:当 $x>0$ 时,设切点为 (x_0,y_0),

由 $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$ 可得切线斜率 $k=\frac{e^{x_0}(x_0-2)}{x_0^3}$,

若直线 $ex+y-2e=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，

则 $\frac{e^{x_0}(x_0-2)}{x_0^3}=-e$，解得 $x_0=1$，

则切点坐标为 $(1,e)$，

故切线方程为 $ex+y-2e=0$，**D 正确**.

11. **A 项**：易得 $AB=2$，则 $\triangle ABQ$ 的周长等于 $AB+AQ+BQ=2+AQ+BQ$，来源：高三答案公众号

设点 A,B 在上底面圆 O 的射影为 A_1,B_1，

[难点]通过射影构造直角三角形，表示各边边长并求解.

则 $AQ=\sqrt{AA_1^2+QA_1^2}=\sqrt{16+QA_1^2}$，

$BQ=\sqrt{BB_1^2+QB_1^2}=\sqrt{16+QB_1^2}$，

所以 AQ,BQ 的长度与点 Q 的位置有关，

所以 $\triangle ABQ$ 的周长不是定值，**A 错误**；

B 项：因为 $V_{A\text{-}BCQ}=V_{Q\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OO_1$，

[难点]三棱锥 $A\text{-}BCQ$ 的高未知且不易求解，故通过等体积法转换顶点，便于求体积.

又 $S_{\triangle ABC}$，OO_1 均为定值，

故三棱锥 $A\text{-}BCQ$ 的体积与点 Q 的位置无关，

且为定值，**B 正确**；

C 项：在等腰梯形 $ABCD$ 中，易知 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$，

解得 $AC=2\sqrt{3}$，且 $\angle AO_1C=\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\triangle ACO_1$ 外接圆的直径为 $2r=\frac{AC}{\sin\angle AO_1C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$，又 $OO_1\perp$ 底面 ACO_1，

所以三棱锥 $O\text{-}ACO_1$ 外接球的直径 $2R=\sqrt{OO_1^2+(2r)^2}=4\sqrt{2}$，

[难点]直三棱锥外接球的直径 $2R=\sqrt{h^2+(2r)^2}$，其中 h 为直三棱锥的高，r 为底面三角形外接圆的半径.

所以其外接球的表面积为 $4\pi R^2=32\pi$，**C 错误**；

D 项：设点 Q 在下底面圆 O_1 内的射影为 Q_1，

连接 AQ_1，

则 $\angle QAQ_1$ 为直线 AQ 与平面 ACO_1 所成角，

且 $\tan\angle QAQ_1=\frac{QQ_1}{AQ_1}$，

又 $QQ_1=OO_1=4$ 为定值，

所以当 AQ_1 取得最大值时，

$\tan\angle QAQ_1$ 取得最小值，$\angle QAQ_1$ 取得最小值，

故当 $AQ_1=4$ 时，$\tan\angle QAQ_1$ 取得最小值 1，

此时 $\angle QAQ_1=45°$，所以直线 AQ 与平面 ACO_1 所成角的最小值为 $45°$，**D 正确**.

12. **A 项**：因为直线 $y=kx+m$ 与圆 O 交于点 M,N，

所以 $|OM|=|ON|=2$，

所以 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|\sin\angle MON$

$=2\sin\angle MON$，

当 $\sin\angle MON=1$，即 $\angle MON=\frac{\pi}{2}$，$OM\perp ON$ 时，

$\triangle MON$ 面积的最大值为 2，**A 正确**；

B 项：设 $M(x_1,y_1)$，

则 $\overrightarrow{MA}=(2-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(-x_1,2-y_1)$，

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1^2+y_1^2-2x_1-2y_1=4-2(x_1+y_1)$，

因为 $4=x_1^2+y_1^2\geqslant 2x_1y_1$，所以 $x_1y_1\leqslant 2$.

[难点]通过点 M 在圆上，即 $x_1^2+y_1^2=4$，结合基本不等式进行放缩.

所以 $(x_1+y_1)^2=4+2x_1y_1\leqslant 8$，

即 $-2\sqrt{2}\leqslant x_1+y_1\leqslant 2\sqrt{2}$，

所以当 $x_1+y_1=2\sqrt{2}$ 时，

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取得最小值 $4-4\sqrt{2}$，**B 错误**；

C 项：当直线 MB 斜率存在时，

则直线 MB：$y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$.

令 $y=0$，可得 $x=\frac{2x_1}{2-y_1}$，故 $D\left(\frac{2x_1}{2-y_1},0\right)$.

直线 MA：$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=0$，可得 $y=\frac{2y_1}{2-x_1}$，所以 $C\left(0,\frac{2y_1}{2-x_1}\right)$.

$$故|AD|\cdot|BC|=\left|\left(2-\frac{2x_1}{2-y_1}\right)\cdot\left(2-\frac{2y_1}{2-x_1}\right)\right|$$

$$=\left|4-\frac{4x_1}{2-y_1}-\frac{4y_1}{2-x_1}+\frac{4x_1y_1}{(2-x_1)(2-y_1)}\right|$$

$$=\left|4+4\left[\frac{4-2x_1-2y_1+x_1y_1}{(x_1-2)(y_1-2)}\right]\right|$$

$$=\left|4+\frac{4(x_1-2)(y_1-2)}{(x_1-2)(y_1-2)}\right|=8;$$

当直线 MB 斜率不存在时，

$|AD|=2$，$|BC|=4$，则 $|AD|\cdot|BC|=8$，

综上所述，$|AD|\cdot|BC|=8$ 为定值，**C 正确**；

D 项：当 $k=1$ 时，$y=x+m$，设 $N(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\y=x+m,\end{cases}$

消去 y 可得 $2x^2+2mx+m^2-4=0$,

则 $x_1+x_2=-m, x_1x_2=\dfrac{m^2-4}{2}$,

则 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{(x_1+m)(x_2+m)}{x_1x_2}$

$=\dfrac{x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$

$=\dfrac{\frac{m^2-4}{2}+m(-m)+m^2}{\frac{m^2-4}{2}}=1$,**D 正确**.

13. 记"甲独自选择一个剧目观看"为事件 A,

记"甲、乙、丙 3 名同学观看的剧目各不相同"为事件 B,则 $P(A)=\dfrac{C_3^1\times2^2}{3^3}=\dfrac{4}{9}$, $P(AB)=\dfrac{A_3^3}{3^3}=\dfrac{2}{9}$,

故 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中,

因为 AC 与 BD 的交点为 M,且 E 为 DM 的中点,

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM})$

$=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\right]$

$=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$=\dfrac{3}{4}(2,6)+\dfrac{1}{4}(-4,4)$

$=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2}\right)$,

故点 E 的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2}\right)$.

15. 审题指导

设直线 l 的方程 → 与抛物线 C 联立,$OM\perp ON$ → 交点纵坐标之间的表达式 → $S_{\triangle MON}$ 的表达式 → $S_{\triangle MON}\in[16,32]$ → 参数的取值范围 → 直线 l 的方程

第 1 步:利用点在抛物线上及垂直关系求解纵坐标之积

设点 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

因为 $OM\perp ON$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$,

即$\dfrac{y_1^2}{4}\cdot\dfrac{y_2^2}{4}+y_1y_2=0$,

解得 $y_1y_2=0$(舍)或 $y_1y_2=-16$.

第 2 步:联立直线与抛物线方程表示纵坐标之积

设直线 $l:x=my+t$,联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+t,\end{cases}$

消去 x 可得 $y^2-4my-4t=0$,

则 $y_1+y_2=4m$, $y_1y_2=-4t$,故 $t=4$.

第 3 步:通过三角形面积求解 m 的取值范围

又 $S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}t\cdot|y_1-y_2|$

$=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=2\sqrt{16m^2+64}=8\sqrt{m^2+4}$,

所以 $16\leqslant8\sqrt{m^2+4}\leqslant32$,

解得 $-2\sqrt{3}\leqslant m\leqslant2\sqrt{3}$.

第 4 步:求解直线 l 的方程

故直线 l 的方程为 $x=my+4(-2\sqrt{3}\leqslant m\leqslant2\sqrt{3})$.

取 $m=0$,可得直线 l 的方程为 $x=4$.

16. **第 1 步:构造函数并判断单调性**

令 $g(x)=f(x)+x$,

则 $g(-x)=f(-x)-x$

$=f(x)+x=g(x)$,

故 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

当 $x>0$ 时, $g'(x)=f'(x)+1>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递减,

在 $[0,+\infty)$ 单调递增.

[难点]利用导函数的正负及偶函数的性质判断函数的单调性.

第 2 步:转化不等式

$f(x+\ln a)>f(x)-\ln a$ 等价于 $f(x+\ln a)+x+\ln a>f(x)+x$,

[难点]观察不等式的形式,通过移项、配凑等方法将关于 $f(x)$ 的不等式转化为关于 $g(x)$ 的不等式.

即 $g(x+\ln a)>g(x)$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $|x+\ln a|>|x|$,

即 $2x\ln a+\ln^2 a>0$.

第 3 步:求 a 的取值范围

由一次函数性质可得$\begin{cases}\ln a>0,\\-4\ln a+\ln^2 a>0,\end{cases}$

[难点]关于 x 的一元一次函数在区间 $[-2,+\infty)$ 上大于 0 恒成立,即该函数单调递增,则 x 的系数大于 0,且函数的最小值也大于 0.

解得 $\ln a>4$,即 $a>e^4$,

故 a 的取值范围是 $(e^4,+\infty)$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。