机密★启用前(新高考卷)

华大新高考联盟2022届高三11月教学质量测评

数学参考答案和评分标准

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	A	A	B	C	B	BD	BC	AD	BC

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】考查共轭复数的运算，考查数学运算等数学核心素养.

【解析】因为 $z=i+1$，所以 $\bar{z}=-i+1$，故 $z\cdot\bar{z}=(i+1)(-i+1)=2$.

2.【答案】C

【命题意图】考查集合的表示法、集合与集合的关系、集合的基本运算，考查数学抽象等数学核心素养.

【解析】对于 B：$y=a^2+1\geq 1$，从而 $B\subseteq A$，$A\cap B=B$.

3.【答案】D

【命题意图】考查函数图象和性质，考查数形结合的思想.

【解析】由函数 $f(x)$ 的图象知函数 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x=1$ 时，$f(1)=0$.

$f(x)=(2^x+2^{-x})\cdot x$ 和 $f(x)=(2^x-2^{-x})\ln|x|$ 是奇函数，故 AC 不正确；

$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}$ 是偶函数，但 $f(1)\neq 0$，故 B 不正确.

4.【答案】A

【命题意图】考查等差数列、等比数列的前 n 项和，考查数学运算等数学核心素养.

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $4a_1$，$2a_2$，a_3 成等差数列，

所以 $4a_1+a_3=4a_2$，即 $4a_1+a_1q^2=4a_1q$，将 $a_1=1$ 代入得 $q^2-4q+4=0$，

解得 $q=2$，

于是 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

5.【答案】A

【命题意图】考查三角函数、切线方程、函数求导，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】因为点 $(0,2)$ 在曲线上，所以 $f(0)=a+\cos 0=2$，于是 $a=1$.

所以 $f(x)=x+\cos x+1$，$f'(x)=1-\sin x$，$f'(0)=1$.

故切线方程为 $y-2=x-0$，即 $x-y+2=0$.

6.【答案】B

【命题意图】考查三角函数图象的伸缩、平移变换，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】将 $y=\sin x$ 的图象纵坐标不变，横坐标缩短至原来的 $\frac{1}{2}$ 得到 $y=f(x)$ 的图象，故 $f(x)=\sin 2x$.

将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$.

7.【答案】C

【命题意图】考查方差、均值，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】设乙得到 10 位市民的幸福感指数为 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$，

甲得到 10 位市民的幸福感指数为 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{20}$，

由平均数为 8，知 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=80$，

所以这 20 位市民的幸福感指数之和为 $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=160$，平均数为 $\frac{160}{20}=8$.

由方差的定义，乙所得数据的方差 $D(x)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-8)^2=0.1$，

由于 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=80$，解得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=644$.

因为甲得到 10 位市民的幸福感指数为 6，7，7，7，8，8，8，9，10，10，

所以 $x_{11}^2+x_{12}^2+\cdots+x_{20}^2=656$，

所以这 20 位市民的幸福感指数的方差为

$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-8)^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-8^2=\frac{1}{20}\times(656+644)-8^2=1$.

8.【答案】B

【命题意图】考查双曲线的性质、直线与双曲线的位置关系，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【解析】由题意得，$0<\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}<1$，

故 $3<\frac{a^2}{b^2}<4$，即 $3b^2<a^2<4b^2$，从而 $3(c^2-a^2)<a^2<4(c^2-a^2)$，

于是 $3c^2<4a^2$，$5a^2<4c^2$，从而 $\frac{\sqrt{5}}{2}<e<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

二、选择题

9.【答案】BD

【命题意图】考查直线的方程与性质，考查逻辑推理、直观想象等数学核心素养.

【解析】∵直线 $y=kx+b$ 不经过第一象限，

∴该直线可能经过二、四象限，即 $k<0$，$b=0$；或经过二、三、四象限，即 $k<0$，$b<0$；或经过三、四象限，即 $k=0$，$b<0$.

∴点 (k,b) 可能落在第三象限，也可能落在坐标轴上，选项 BD 正确.

10.【答案】BC

【命题意图】考查依据古典概型概率计算公式计算概率，考查数学运算等数学核心素养.

【解析】恰有 2 人选一个地方的方法总数为 $C_3^2\cdot A_5^2=60$，故 A 错误，B 正确；

3 个人随机选 5 个地方，基本事件的总数为 5^3，恰有 1 人选泰山含基本事件数 $C_3^1\cdot(4+A_4^2)=48$，恰有 1 人选泰山的概率为 $\frac{48}{5^3}=\frac{48}{125}$，C 正确，D 错误.

11.【答案】AD

【命题意图】考查对数函数及性质，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】先证明：对任意 $0<a<b<1$，$0<c<d<1$ 有 $\log_c(\log_a b)<\log_d(\log_a b)$，证明如下：

因为 $0<a<b<1$，所以 $f(x)=\log_a x$ 单调递减（此时 a 是定值），

故 $f(a)>f(b)>f(1)$，即 $0<\log_a b<1$，

记 $t=\log_a b$，则 $0<t<1$，$g(x)=\log_t x$ 单调递减，

故 $g(c)>g(d)>g(1)$，即 $0<\log_t d<\log_t c$，

故 $0<\log_c t<\log_d t$，代入 $t=\log_a b$，即 $\log_c(\log_a b)<\log_d(\log_a b)$.

取 $a=c=x_1$，$b=d=x_2$ 时，可得选项 A 正确，选项 B 错误.

应用上述证明可得

$\log_{a_1}(\log_{a_1}x_2)+\log_{a_2}(\log_{a_2}x_3)+\cdots+\log_{a_n}(\log_{a_n}x_1)$

$<\log_{a_n}(\log_{a_1}x_2)+\log_{a_n}(\log_{a_2}x_3)+\cdots+\log_{a_n}(\log_{a_n}x_1)$

$=\log_{a_n}[(\log_{a_1}x_2)\cdot(\log_{a_2}x_3)\cdots(\log_{a_n}x_1)]=\log_{a_n}1=0$.

故选项 D 正确，选项 C 错误.

12.【答案】BC

【命题意图】考查函数新定义问题、函数与方程，考查学生的计算能力和逻辑推理能力.

【解析】对 A 选项，取函数 $f(x)=x^2$，$f(0)=0$，0 既是 $f(x)$ 的不动点，又是 $f(x)$ 的次不动点，故 A 错误；

对 B 选项，定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数满足 $f(0)=0$，故 B 正确；

对 C 选项，当 $\log_{\frac{1}{2}}(4^x-a\cdot 2^x+1)=x$ 时，

$\therefore 4^x-a\cdot 2^x+1=\frac{1}{2^x}$，即 $a=2^x+\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^{2x}}$.

令 $2^x=t$，$t\in[1,2]$，$\therefore a=t+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，$a=2^x+\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^{2x}}$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，满足 $\log_{\frac{1}{2}}(4^x-a\cdot 2^x+1)=x$ 有唯一解，则 $1\leqslant a\leqslant\frac{9}{4}$.

当 $\log_{\frac{1}{2}}(4^x-a\cdot 2^x+1)=-x$ 时，

$\therefore 4^x-a\cdot 2^x+1=2^x$，即 $a=2^x+\frac{1}{2^x}-1$.

令 $2^x=t$，$t\in[1,2]$，$\therefore a=t+\frac{1}{t}-1$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，$a=2^x+\frac{1}{2^x}-1$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

满足 $\log_{\frac{1}{2}}(4^x-a\cdot 2^x+1)=-x$ 有唯一解，则 $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$.

综上 $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故 C 正确；

对 D 选项，因为函数 $f(x)=\sqrt{e^x-\frac{1}{2}x-a}$ 在区间 $[0,1]$ 上存在不动点，

则 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上有解，则 $a=e^x-\frac{1}{2}x-x^2$ 在 $[0,1]$ 上有解.

令 $m(x)=e^x-\frac{1}{2}x-x^2$，则 $m'(x)=e^x-\frac{1}{2}-2x$，再令 $n(x)=e^x-\frac{1}{2}-2x$，则 $n'(x)=e^x-2$，令 $n'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$，所以 $n(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,1)$ 上单调递增.

所以 $n(x)_{\min}=n(\ln 2)=2-\frac{1}{2}-2\ln 2=\frac{3}{2}-2\ln 2=\ln e^{\frac{3}{2}}-\ln 4=\ln\sqrt{e^3}-\ln\sqrt{16}>0$.

所以 $m'(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，所以 $m(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增.

所以 $m(x)_{\min}=m(0)=1$，$m(x)_{\max}=m(1)=e-\frac{3}{2}$.

所以实数 a 满足 $1\leqslant a\leqslant e-\frac{3}{2}$（e 为自然对数的底数），存在正整数 $a=1$ 满足条件，故 D 错误.

三、填空题

13.【答案】$[1,+\infty)$.

【命题意图】考查抛物线的定义及性质，考查逻辑推理等数学核心素养.

【解析】由题可知 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$.

设抛物线上任意一点为 $M(x_1,y_1)(x_1\geqslant 0)$，焦点为 F.

由抛物线的定义得 $|MF|=x_1+1$，因为 $x_1\geq0$，故 $|MF|\geq1$.

14.【答案】$-\frac{5}{7}$.

【命题意图】考查平面向量，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】因为 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，

所以 $1-\lambda+4+8\lambda=0$，故 $\lambda=-\frac{5}{7}$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【命题意图】考查解三角形及平面向量，考查数学建模、数学抽象等数学核心素养.

【解析】由题可知 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BN}$ 所成角即为 $\angle MPN$.

故 $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times5^2+\frac{1}{2}\times2\times5\times\frac{7}{20}}=3$.

$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$=\sqrt{2^2+\frac{1}{4}\times5^2-2\times5\times\frac{7}{20}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

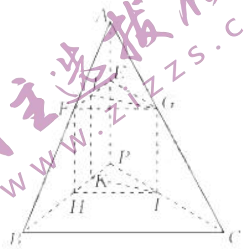
$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{4}\times5^2-\frac{1}{4}\times2\times5\times\frac{7}{20}=\frac{27}{8}$.

于是 $\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

16.【答案】$\frac{128}{27}$；$\frac{2abc}{27}$.

【命题意图】考查三棱柱的体积计算及空间几何体的综合，考查直观想象、数学建模、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】先考虑顶点位置，如图，若直三棱柱 EJG-PKI 上底面的顶点 J 没有落在棱 AB 上，总可以将 EJ 延长交棱 AB 于点 F，过点 F 作 PA 的平行线交 PB 于点 H，得到新的三棱柱 EFG-PHI，新三棱柱 EFG-PHI 的体积比原三棱柱 EJG-PKI 的体积大，其他上底面顶点同理. 若要直三棱柱的体积最大，则上底面三个顶点均落在相应的棱上.



第 16 题图

因为底面 EFG∥底面 PBC，所以 $\triangle EFG\backsim\triangle PBC$，设 $\frac{EF}{PB}=x$，则 $\frac{EG}{PC}=x$，$\frac{EP}{PA}=1-x$，$0<x<1$.

于是 $EF=bx$，$EG=cx$，$EP=(1-x)a$.

故三棱柱 EFG-PHI 的体积为 $V=\frac{1}{2}\cdot bx\cdot cx\cdot(1-x)a=\frac{abc}{2}(-x^3+x^2)$.

设 $f(x)=-x^3+x^2$，$0<x<1$，则 $f'(x)=-3x^2+2x=x(2-3x)$，

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{2}{3}$；由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{2}{3}$ 或 $x<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减.

故 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{27}$.

从而体积最大值为$\frac{2abc}{27}$.若 $a=b=c=1$,则最大体积为$\frac{128}{27}$.

四、解答题

17.【命题意图】考查解三角形,考查数学运算等数学核心素养.

【解析】(1)依题意:$b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=0$,

由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos B=0$,

由于 $0<A<\pi$,$\sin A>0$,所以 $\sin B+\sqrt{3}\cos B=0$,即 $\tan B=-\sqrt{3}$,

由于 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由余弦定理和三角形的面积公式得

$\begin{cases} b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \\ \frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 即$\begin{cases} 5=a^2+c^2, \\ ac=2, \end{cases}$ 可得 $a+c=3$.

故△ABC 的周长为 $3+\sqrt{7}$. ………………………………………………………………… 10 分

18.【命题意图】考查数列通项和数列求和,考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $n=1$ 时,$a_1^3=1$,从而 $a_1=1$;

当 $n\geq 2$ 时,可得

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ①

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n-1}^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$, ②

由①-②得 $a_n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=n^3$,

于是 $a_n=n$,

经检验,$a_1=1$ 满足 $a_n=n$,故 $a_n=n$. ………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $a_n=n$,故 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,

从而$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

于是$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2021}}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}\right)=\frac{2021}{1011}$. …………… 12 分

19.【命题意图】考查空间中线线、线面、面面的位置关系,二面角的平面角的求法,考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)证明:∵$CC_1 /\!/ DD_1$,$DD_1\subset$平面 DD_1P,$CC_1\not\subset$平面 DD_1P,

∴$CC_1 /\!/$平面 DD_1P.

又∵$CC_1\subset$平面 CC_1P,平面 $DD_1P\cap$平面 $CC_1P=l$,

∴$l /\!/ CC_1$. ……………………………………………………………………………………… 4 分

(2)解:**方法一** 如图(1),在平面 A_1ABB_1 内过点 P 作 $P_1P_2 /\!/ AA_1$ 交 A_1B_1 于点 P_1,交 AB 于点 P_2,连接 D_1P_1,C_1P_1,DP_2,CP_2.

∵$P_1P_2 /\!/ AA_1$,$AA_1 /\!/ DD_1$,

∴平面 DD_1P 即平面 $DD_1P_1P_2$.

∵ $P_1P_2 // AA_1$, $AA_1 // CC_1$,

∴平面 CC_1P 即平面 $CC_1P_1P_2$.

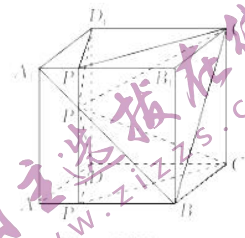
现需求平面 $DD_1P_1P_2$ 与平面 $CC_1P_1P_2$ 所成二面角的平面角的正弦值.

平面 $DD_1P_1P_2 \cap$ 平面 $CC_1P_1P_2 = P_1P_2$.

∵ $P_1P_2 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $D_1P_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $C_1P_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

∴ $D_1P_1 \perp P_1P_2$, $C_1P_1 \perp P_1P_2$,

∴ $\angle D_1P_1C_1$ 即为二面角 $D_1-P_1P_2-C_1$ 的平面角.



第19题图(1)

在 $\triangle D_1P_1C_1$ 中, $D_1P_1=\sqrt{A_1D_1^2+A_1P_1^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$, $C_1P_1=\sqrt{B_1C_1^2+B_1P_1^2}=\frac{5}{4}$, $C_1D_1=1$.

由余弦定理得 $\cos\angle D_1P_1C_1=\frac{D_1P_1^2+C_1P_1^2-C_1D_1^2}{2D_1P_1\cdot C_1P_1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2-1^2}{2\times\frac{\sqrt{17}}{4}\times\frac{5}{4}}=\frac{13\sqrt{17}}{85}$.

故平面 DD_1P 与平面 CC_1P 所成二面角的正弦值为 $\frac{16\sqrt{17}}{85}$. ………………………………………… 12分

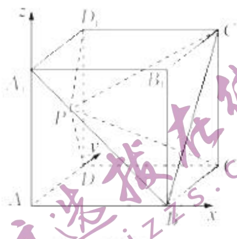
方法二 如图(2),以点 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,

则 $P\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right)$, $C(1,1,0)$, $C_1(1,1,1)$, $D(0,1,0)$, $D_1(0,1,1)$.

$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{3}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$.

设平面 CC_1P 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$, 平面 DD_1P 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}-\frac{3}{4}x_1-y_1+\frac{3}{4}z_1=0,\\ z_1=0.\end{cases}$



第19题图(2)

令 $x_1=-1$, 则 $\boldsymbol{m}=\left(-1,\frac{3}{4},0\right)$.

同理, $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\frac{1}{4}x_2-y_2+\frac{3}{4}z_2=0,\\ z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=-1$, 则 $\boldsymbol{n}=\left(-1,-\frac{1}{4},0\right)$.

设所求二面角为 θ, 则 $|\cos\theta|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{17}}{4}}\right|=\frac{13\sqrt{17}}{85}$.

∴ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{16\sqrt{17}}{85}$.

∴平面 DD_1P 与平面 CC_1P 所成二面角的正弦值为 $\frac{16\sqrt{17}}{85}$. ………………………………………… 12分

20.【命题意图】考查 n 次独立重复试验、分布列、期望、方差,考查数据分析、数学运算等数学核心素养.

【解析】(1) $X=2$ 表示小明答对1道题得2分,其他题不得分.

故 $P(X=2)=C_4^1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{12}{256}=\frac{3}{64}$. ………………………………………………………………… 2分

(2) $X=2i(i=0,1,2,3,4)$ 表示小明答对 i 道题得 $2i$ 分,其他题不得分.

故 $P(X=2i)=C_4^i\times\left(\frac{3}{4}\right)^i\times\left(\frac{1}{4}\right)^{4-i}=\frac{3^iC_4^i}{256}$.

分别代入 $i=0,1,2,3,4$，列出分布列如下：

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

$E(X)=0\times\frac{1}{256}+2\times\frac{12}{256}+4\times\frac{54}{256}+6\times\frac{108}{256}+8\times\frac{81}{256}=6$.

$D(X)=(0-6)^2\times\frac{1}{256}+(2-6)^2\times\frac{12}{256}+(4-6)^2\times\frac{54}{256}+(6-6)^2\times\frac{108}{256}+(8-6)^2\times\frac{81}{256}=3$.

故 X 的数学期望为 6，方差为 3. ………………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】考查直线与椭圆的位置关系，考查直观想象、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)设 $P(x_P,y_P)$，$x_P\neq\pm2$.

对于 C_1，由题可得 $\frac{y_P-0}{x_P-(-2)}\cdot\frac{y_P-0}{x_P-2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1$，

整理得 $\frac{x_P^2}{4}+y_P^2=1$.

故 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$.

对于 C_2，由题可得 $\frac{y_P-0}{x_P-(-2)}\cdot\frac{y_P-0}{x_P-2}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1$，

整理得 $\frac{x_P^2}{4}-y_P^2=1$.

故 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm2)$. ………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可得 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$，$C_2:\frac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm2)$.

C_1 的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 与 C_2 无交点，不满足题意，故直线 l 的斜率存在.

于是可设直线 l 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$.

联立 $\begin{cases}y=k(x-\sqrt{3}),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2x+4(3k^2-1)=0$.

$\Delta_1=16(k^2+1)>0$ 恒成立，

由韦达定理：$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4(3k^2-1)}{4k^2+1}$. ①

于是 $|CD|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

将①代入整理得 $|CD|=\frac{4(k^2+1)}{4k^2+1}$.

同理 $|MN|=\frac{4\sqrt{(k^2+1)(1-k^2)}}{|4k^2-1|}$，其中 $\Delta_2=16(1-k^2)>0$，故 $k^2<1$.

因为 $|MN|=\sqrt{3}|CD|$，所以 $\frac{4\sqrt{(k^2+1)(1-k^2)}}{|4k^2-1|}=\frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{4k^2+1}$.

设 $t=k^2(0<t<1)$，则 $\frac{\sqrt{(t+1)(1-t)}}{|t-1|}=\frac{\sqrt{3}(t+1)}{4t+1}$，即 $\frac{\sqrt{1-t}}{|t-1|}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{t+1}}{4t+1}$.

平方整理得 $32t^3+8t^2-14t+1=0$，

因式分解得 $(2t-1)(16t^2+12t-1)=0$，

解得 $t_1=\frac{1}{2}$，$t_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{8}$，$t_3=\frac{-3-\sqrt{13}}{8}$(舍去).

即 $k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{8}}$.

于是所有满足条件的直线 l 的斜率之积为 $k_1k_2k_3k_4=(-t_1)(-t_2)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{-3+\sqrt{13}}{8}\right)=\frac{\sqrt{13}-3}{16}$.

…………………………………………………………………………………………… 12 分

22.【命题意图】考查导数、函数的最值、不等式恒成立问题，考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=\frac{1}{e}\left(\frac{e^x}{x}-x+\ln x\right)$，定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{e}\left(\frac{xe^x-e^x}{x^2}-1+\frac{1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x-x^2+x}{ex^2}=\frac{(x-1)(e^x-x)}{ex^2}$.

设 $g(x)=e^x-x$，$x>0$，$g'(x)=e^x-1>0$，故 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(x)>g(0)=1>0$.

由 $f'(x)>0$ 解得 $x>1$；由 $f'(x)<0$ 解得 $0<x<1$.

故 $f(x)$ 单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$. …………………………………… 4 分

(2)若要 $f(x)\geq 0$，只需 $\frac{e^{x-1}}{x}\geq a(x-\ln x)$，

即需要 $e^{x-\ln x-1}\geq a(x-\ln x)$ 恒成立.

设 $t(x)=x-\ln x$，$x>0$，$t'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

由 $t'(x)>0$ 得 $x>1$；由 $t'(x)<0$ 得 $0<x<1$.

故 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $t(x)\geq t(1)=1$.

于是需要 $e^{t-1}\geq at$ 恒成立，即 $\frac{e^{t-1}}{t}\geq a$ 恒成立.

由(1)中解答过程可得：当 $x>0$ 时，$g(x)=e^x-x>1$，从而 $e^x>x+1$，即 $\frac{e^x}{x+1}>1$.

用 $t-1$ 替换上式中的 x 得 $\frac{e^{t-1}}{t}>1$.

结合当 $t=1$ 时，$\frac{e^{t-1}}{t}=1$，故 $\frac{e^{t-1}}{t}\geq 1$ 恒成立.

于是若要 $\frac{e^{t-1}}{t}\geq a$ 恒成立，则 $a\leq 1$，即 $a\in(-\infty,1]$. …………………………………… 12 分