



2020 年全国高中数学联赛江苏赛区

市级选拔赛参考答案与评分细则

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 7 分，共 70 分。要求直接将答案写在横线上。）

1. $2^{2020} - 2^{20}$ 2. $\{0, 2\}$ 3. $\frac{3}{10}\sqrt{10}$ 4. $-\frac{2}{5}$ 5. $\frac{1}{3}$
6. $(0, \frac{\pi}{3})$ 7. $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 8. $\frac{545}{256}\pi a^2$ 9. 17 10. $\frac{\pi^2}{6}$

二、解答题（本大题共 4 小题，每小题 20 分，共 80 分）

11. 解：因为 $A(0, -1)$ ， $B(0, 1)$ ，直线 MA 的方程为 $y = -\frac{1}{m}x - 1$ ，直线 MB 的方程为

$$y = -\frac{3}{m}x + 1, \text{ 由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{m}x - 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } x_G = -\frac{8m}{m^2 + 4},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{3}{m}x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } x_H = \frac{24m}{m^2 + 36}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } S_1 = \frac{1}{2} |MA| |MB| \sin \angle AMB, \quad S_2 = \frac{1}{2} |MG| |MH| \sin \angle GMH, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{S_1}{S_2} &= \frac{|MA| |MB|}{|MG| |MH|} = \frac{|m|}{|m - x_G|} \cdot \frac{|m|}{|m - x_H|} = \frac{m^2}{|m + \frac{8m}{m^2 + 4}| |m - \frac{24m}{m^2 + 36}|} \\ &= \frac{(m^2 + 4)(m^2 + 36)}{(m^2 + 12)^2} = \frac{m^4 + 40m^2 + 144}{m^4 + 24m^2 + 144} = 1 + \frac{16m^2}{m^4 + 24m^2 + 144} \dots\dots\dots 15 \text{ 分} \\ &= 1 + \frac{16}{m^2 + \frac{144}{m^2} + 24} \leq 1 + \frac{16}{2\sqrt{144} + 24} = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } m^2 = \frac{144}{m^2}, \text{ 即 } m^2 = 12, \quad m = \pm 2\sqrt{3} \text{ 时, } \frac{S_1}{S_2} \text{ 的最大值为 } \frac{4}{3}. \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

12. 证明：(1) 因为 $2S_n - na_n = n$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} - (n-1)a_{n-1} = n-1,$$



两式相减得 $2a_n - na_n + (n-1)a_{n-1} = 1$,

即 $(n-2)a_n + 1 = (n-1)a_{n-1}$, 又 $(n-1)a_{n+1} + 1 = na_n$,

两式相减得 $(n-1)a_{n+1} - (n-2)a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} = 2(n-1)a_n$,

所以 $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 5 分

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 0$),

在 $2S_n - na_n = n$ 中, 令 $n=1$, 得 $a_1 = 1$,

则 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d$, 所以 $b_n = \frac{S_{n+1}}{n} = \frac{n+1 + \frac{(n+1)n}{2}d}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}d$ 10 分

若 $a_{n+1} \leq b_n < a_{n+2}$, 则 $1 + nd \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}d < 1 + (n+1)d$,

即 $\begin{cases} n^2 - n - \frac{2}{d} \leq 0, \\ n^2 + n - \frac{2}{d} > 0. \end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} < n \leq \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2}$, 15 分

因为 $d > 0$, 所以 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} > 0$,

又 $\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2} - \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2} = 1$, 所以存在唯一的正整数 n ,

使 $n \in (\frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}-1}{2}, \frac{\sqrt{1+\frac{8}{d}}+1}{2}]$, 即 $a_{n+1} \leq b_n < a_{n+2}$ 20 分

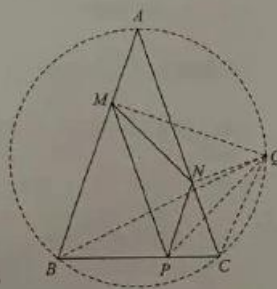
13. 证明: 连结 QM, QN, QB, QC, QP ,

因为 $PM \parallel CA$, 所以 $\angle BPM = \angle C$,

又因为 $\angle B = \angle C$, 所以 $\angle BPM = \angle B$,

所以 $MB = MP$, 即 $\triangle MBP$ 是等腰三角形,

又因为点 P, Q 关于直线 MN 对称,



所以 $MB = MP = MQ$.

同理 $NP = NQ = NC$,

即点 M 是 $\triangle BPQ$ 的外心, 点 N 是 $\triangle CPQ$ 的外心. 10 分

所以 $\angle BQP = \frac{1}{2} \angle BMP = \frac{1}{2} \angle BAC$,

$\angle PQC = \frac{1}{2} \angle PNC = \frac{1}{2} \angle BAC$, 15 分

所以 $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle BAC$,

所以 Q, A, B, C 四点共圆, 即 Q 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 20 分

14. 解: 考虑一般情况, 设 $\triangle ABC$ 的内部有 n 个点, 把 $\triangle ABC$ 分割成 a_n 个没有重叠部分的小三角形, 考察新增加的一个点 P_{n+1} :

(1) 若 P_{n+1} 在某个小三角形的内部, 如图 1 所示, 那么原小三角形的三个顶点和点 P_{n+1}

连结, 这些线段把这个小三角形一分为三, 即增加了两个小三角形; 5 分



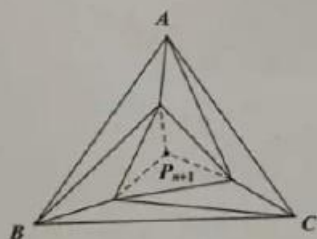


图 1

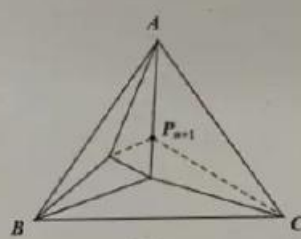


图 2

(2) 若 P_{n+1} 在某两个小三角形的公共边上, 如图 2 所示, 那么这两个小三角形的顶点和点 P_{n+1} 连结, 把这两个小三角形一分为二, 即也增加了两个小三角形. 10 分

综上, $\triangle ABC$ 内部的 $n+1$ 个点把 $\triangle ABC$ 分割成的小三角形的个数 $a_{n+1} = a_n + 2$, 即 $\{a_n\}$ 是等差数列, 又易知 $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, 所以 $a_n = 2n + 1$ 15 分

所以, 当 $n = 2020$ 时, $a_{2020} = 4041$, 即可以把 $\triangle ABC$ 分割成 4041 个没有重叠部分的小三角形. 20 分

(注: 直接猜出 $a_n = 2n + 1$, 进而得到正确答案是 4041, 给 5 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (<http://www.zizzs.com/>) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主招生领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》