# 百校联盟 2021届普通高中教育教学质量监测考试

## 全国Ⅰ卷　理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分150分，测试时间120分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.

## 第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-1\leqslant 0\}$，$B=\{x|1-2x<0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

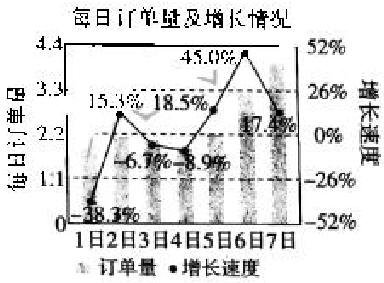
A. $[-1,\frac{1}{2}]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[\frac{1}{2},1]$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 设复数 $z$ 满足 $\frac{z}{\bar{z}}$ 为纯虚数，$z$ 在复平面内所对应的点的坐标为 $(x,y)$，则

A. $x-y=0$　　B. $x+y=0$

C. $(x-y)(x+y)=0$　　D. $x^2+y^2=1$

3. 数据显示2021年3月以来文化类旅游的市场占比显著提升，某旅游服务平台收集并整理了2021年3月1日至7日期间某文化类景区门票日订单量(单位：万张)和增长速度的数据，绘制了右边的统计图. 则下列结论正确的是(增长速度=(本期数－上期数)/上期数)



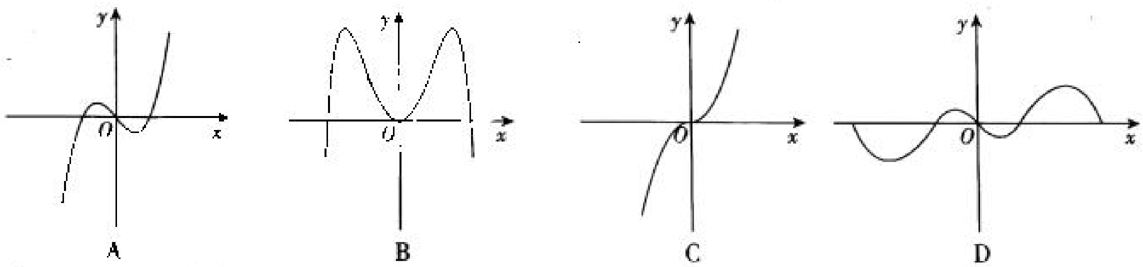

A. 7天的增长速度逐日增加

B. 7天中有3天的增长速度为正

C. 7天的增长速度的平均值为负

D. 3月6日的订单量约为3.19(万张)

4. 函数 $f(x)=|x|(e^x-e^{-x})$ 的部分图象大致为




5.《九章算术》是中国古代张苍，耿寿昌所撰写的一部数学专著，全书总结了战国，秦，汉时期的数学成就. 其中有如下问题："今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等，问各得几何?"其意思为："今有5人分5钱，各人所得钱数依次为等差数列，其中前2人所得之和与后3人所得之和相等，问各得多少钱?". 则第4人所得钱数为

A. $\frac{1}{2}$钱　　B. $\frac{2}{3}$钱　　C. $\frac{5}{6}$钱　　D. 1钱

6. 已知 $a=\sqrt{2}$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_3 2$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

7. 已知点 $D,O$ 分别为圆锥的顶点和底面圆心，$\triangle ABC$ 为圆锥底面的内接正三角形，$AD=AB$，则异面直线 $AD$ 与 $BO$ 所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 $A,B$ 是抛物线 $E:y^2=x$ 上的点，$C$ 是 $x$ 轴上的点，$AC\perp x$ 轴，$\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $A$ 的横坐标为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{16}{3}$

9. 已知点 $A,B,C$ 在圆 $O$ 上，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，$\lambda\overrightarrow{OA}-\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，则 $\lambda^2+\mu^2=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

10. 10 个不同的数排成 4 行，第 1 行 1 个数，第 2 行 2 个数，第 3 行 3 个数，第 4 行 4 个数，设 $a_k$ 是第 $k(k=1,2,3,4)$ 行中的最大数，则 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 的概率为

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{2}{15}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

11. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\neq 0)$ 的导函数，$f(-1)=-1$. 当 $x>0$ 时，$f'(x)>1$，则使得 $f(x)>x$ 成立的 $x$ 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

12. 已知正方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，$P,Q,R$ 分别是棱 $AB,AD,AA_1$ 上的点，$\triangle PQR$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形，若将正方体木块切割成以 $\triangle PQR$ 为底面的直三棱柱，则三棱柱的高的最大值为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

## 第Ⅱ卷

**本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答.**

**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.**

13. 设 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x+2 \\ y\geqslant 2x \\ 2x+3y\geqslant -6 \end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最小值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geqslant 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$，若对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|\geqslant ax$，则 $a=$________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 $F$，$O$ 为坐标原点，$P$ 为双曲线 $C$ 右支上一点，$|PF|-|PO|=2a$，则双曲线 $C$ 的离心率的取值范围是________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_{n+1}b_n=a_n$. 若 $S_{100}<k(k\in\mathbf{Z})$，则 $k$ 的最小值为________.

**三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，设 $\sqrt{2}c\sin(B+\frac{\pi}{4})=a$.

(1)求 $C$；

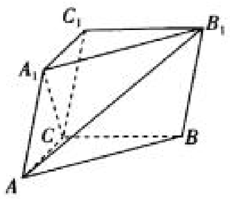
(2)若 $c=2$，$a=\sqrt{2}b$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.(本小题满分 12 分)

如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是等腰直角三角形,$\angle ACB=\angle BCC_1=90^\circ$,四边形 $ACC_1A_1$ 是菱形,$\angle ACC_1=120^\circ$.

(1)证明:$A_1C\perp AB_1$;

(2)求二面角 $A-BB_1-C$ 的余弦值.




19.(本小题满分 12 分)

中国是世界上沙漠化最严重的国家之一,沙漠化造成生态系统失衡,可耕地面积不断缩小,对中国工农业生产和人民生活带来严重影响.随着综合国力逐步增强,西北某地区大力兴建防风林带,引水拉沙,引洪淤地,开展了改造沙漠的巨大工程,该地区于 2017 年投入沙漠治理经费 2 亿元,从 2018 年到 2020 年连续 3 年每年增加沙漠治理经费 1 亿元,近 4 年沙漠治理经费投入 $x$(亿元)和沙漠治理面积 $y$(万亩)的相关数据如下表所示:

| 年份 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 26 | 39 | 49 | 54 |

(1)通过绘制散点图看出,可用线性回归模型拟合 $y$ 与 $x$ 的关系,请用相关系数加以说明;(结果保留 3 位小数)

(2)建立 $y$ 关于 $x$ 的回归方程;

(3)若保持以往的沙漠治理经费增加幅度,请预测到哪一年沙漠治理面积突破 100 万亩.

参考数据:$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}\approx 21.4$,$\sqrt{5}\approx 2.2$;

参考公式:相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,过左焦点 $F$ 且与 $x$ 轴垂直的弦长为$\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 $C$ 的方程;

(2)已知 $A,B$ 为椭圆 $C$ 上两点,$O$ 为坐标原点,斜率为 $k$ 的直线 $l$ 经过点 $P(0,\dfrac{1}{2})$,若 $A,B$ 关于 $l$ 对称,且 $OA\perp OB$,求 $l$ 的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2e^x+\ln x$.

(1)判断函数 $f(x)$的单调性,并证明 $f(x)$有且仅有一个零点;

(2)若 $x(e^x-a)\geqslant\ln(ex)$,求 $a$ 的取值范围.

**请考生从第 22、23 题中任选一题作答,并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑,按所选涂题号进行评分;多涂、多答,按所涂的首题进行评分;不涂,按本选考题的首题进行评分.**

22.(本小题满分 10 分)【选修 4-4:坐标系与参数方程】

在直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\cos\alpha\\ y=b+\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点为极点,$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1)若 $a^2+b^2=1$,$C_1$ 与 $C_2$ 有且只有 1 个公共点,求 $a$;

(2)若 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,曲线 $C_1$,$C_2$ 交于 $A$,$B$ 两点,求 $|AB|^2$.

23.(本小题满分 10 分)【选修 4-5:不等式选讲】

已知 $a$,$b$ 为正数,函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|$ 的值域为 $[1-c,+\infty)$.

(1)若 $c=-1$,证明:$a+b\geqslant 2ab$;

(2)若 $c>0$,证明:$\dfrac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}\geqslant 8$.

# 百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

## 全国Ⅰ卷　理科数学　参考答案

1. A 【解析】$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>\frac{1}{2}\}$，$\complement_R B=\{x|x\leqslant\frac{1}{2}\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}=[-1,\frac{1}{2}]$.

2. C 【解析】由题意可知 $z=x+yi$，$\bar{z}=x-yi$，则$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{x+yi}{x-yi}=\frac{(x+yi)^2}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2}i$，若为纯虚数，则 $x^2-y^2=0$，即$(x-y)(x+y)=0$.

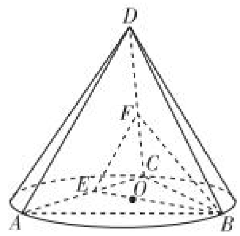
3. D 【解析】结合统计图可知，3 日，4 日和 7 日的增长速度比前一天均下降，A 选项不正确；7 天中，2 日，5 日，6 日和 7 日的增长速度均为正，B 选项不正确；根据统计图可知 7 天的增长速度的平均值为正，C 选项不正确；3 月 5 日的订单量约为 2.2(万张)，则 3 月 6 日的订单量约为 $2.2\times(1+0.45)=3.19$(万张)，D 选项正确.

4. C 【解析】$f(-x)=|-x|(e^{-x}-e^x)=-|x|(e^x-e^{-x})=-f(x)$，故 $f(x)$为奇函数，函数图象关于原点中心对称，排除 B 选项；当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$0<e^{-x}<1$，$e^x-e^{-x}>0$，且$|x|>0$，故 $f(x)=|x|(e^x-e^{-x})>0$，排除 A，D 选项.

5. C 【解析】设从前到后的 5 个人所得钱数构成首项为 $a_1$，公差为 $d$ 的等差数列$\{a_n\}$，则有 $a_1+a_2=a_3+a_4+a_5$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$，故$\begin{cases}a_1+8d=0\\a_1+2d=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=\frac{4}{3}\\d=-\frac{1}{6}\end{cases}$，则 $a_4=a_1+3d=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

6. C 【解析】由 $a=\sqrt{2}>1$，$b=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$，可得 $a^6=(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$，$b^6=(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9$，则有 $a^6<b^6$，所以 $1<a<b$；$c=\log_3 2<\log_3 3=1$，则 $c<a<b$.

7. B 【解析】如图所示，连接 $CD$，$BD$，延长 $BO$ 交 $AC$ 于点 $E$，取 $CD$ 中点 $F$，连接 $EF$，$BF$. 因为$\triangle ABC$ 为正三角形，且 $O$ 为$\triangle ABC$ 的外心，所以 $E$ 为 $AC$ 的中点，故 $EF\parallel AD$，则$\angle BEF$ 即为异面直线 $AD$ 与 $BO$ 所成的角. 设 $AD=AB=2$，则 $EF=1$，$BE=\sqrt{3}$. 由题意可知$\triangle BCD$ 为等边三角形，则 $BF=\sqrt{3}$，在$\triangle BEF$ 中，$\cos\angle BEF=\frac{BE^2+EF^2-BF^2}{2BE\cdot EF}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.




8. B 【解析】设 $A(y_A^2,y_A)$，$B(y_B^2,y_B)$，因为$\triangle ABC$ 为等边三角形，所以点 $B$ 为线段 $AC$ 的中垂线与抛物线 $E$ 的交点，即 $y_B=\frac{1}{2}y_A$，且$|y_A^2-y_B^2|=|\frac{\sqrt{3}}{2}y_A|$，解得$|y_A|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，从而 $y_A^2=\frac{4}{3}$.

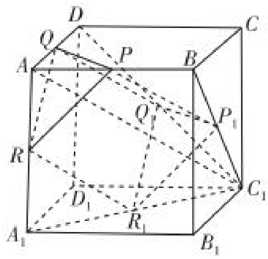
9. B 【解析】由$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$得$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2$，则有$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2$，即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，依题意得$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，把$\lambda\overrightarrow{OA}-\mu\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$两边平方得$\lambda^2|\overrightarrow{OA}|^2+\mu^2|\overrightarrow{OB}|^2-2\lambda\mu\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OC}|^2$，即$\lambda^2|\overrightarrow{OA}|^2+\mu^2|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$，所以$\lambda^2+\mu^2=1$.

10. B 【解析】最大一个数在第 4 行的概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，在任意排好第 4 行后，余下的 6 个数排在前 3 行，符合要求的排列的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，在任意排好第 3 行后，余下的 3 个数排在前 2 行，符合要求的排列的概率为$\frac{2}{3}$，故 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 的概率为 $P=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$.

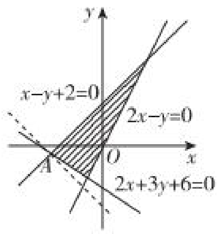
11. B 【解析】由 $f'(x)>1(x>0)$，可得 $f'(x)-1>0$，令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g'(x)=f'(x)-1>0$，故 $g(x)$在

$(0,+\infty)$上单调递增. 因为$f(-1)=-1$,所以$g(-1)=f(-1)+1=0$,又因为$f(x)$为奇函数,所以$g(x)=f(x)-x$为奇函数,所以$g(1)=0$,且在区间$(-\infty,0)$上,$g(x)$单调递增. 所以使得$f(x)>x$,即$g(x)>0$成立的$x$的取值范围是$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

12. C 【解析】由题意可知,$P,Q,R$分别是棱$AB,AD,AA_1$的中点. 如图所示,连接$A_1C_1,BC_1,C_1D$,并分别取它们的中点$R_1,P_1,Q_1$,连接$RR_1,PP_1,QQ_1,R_1P_1,P_1Q_1,Q_1R_1$,则$RR_1/\!/AC_1,PP_1/\!/AC_1,QQ_1/\!/AC_1$,且$RR_1=PP_1=QQ_1=\frac{1}{2}AC_1$. 因为$AC_1\perp$平面$PQR$,所以$RR_1\perp$平面$PQR$,$PP_1\perp$平面$PQR$,$QQ_1\perp$平面$PQR$,故三棱柱$PQR-P_1Q_1R_1$为直三棱柱,高$h=RR_1=\frac{AC_1}{2}=2\sqrt{3}$,且此时三棱柱的高最大.




13. $-\frac{14}{5}$ 【解析】作出可行域如图中阴影部分所示,结合图形可知,当直线$z=x+y$过点$A\left(-\frac{12}{5},-\frac{2}{5}\right)$时,$z$取最小值,$z_{min}=-\frac{12}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{14}{5}$.




14. 0 【解析】当$x\geqslant0$时,$|f(x)|=x^3\geqslant ax$,即$x(x^2-a)\geqslant0$恒成立,则有$a\leqslant0$;当$x<0$时,$|f(x)|=x^2\geqslant ax$,即$a\geqslant x$恒成立,则有$a\geqslant0$,所以$a=0$.

15. $[2,+\infty)$ 【解析】设双曲线$C$的右焦点为$F_1$,由双曲线的定义可知$|PF|-|PF_1|=2a$,故$|PO|=|PF_1|$,设$c^2=a^2+b^2$,则$P$点的横坐标为$\frac{c}{2}$,因为点$P$在双曲线上,显然有$\frac{c}{2}\geqslant a$,即$e=\frac{c}{a}\geqslant2$,所以离心率$e$的取值范围是$[2,+\infty)$.

16. 1 【解析】由$a_{n+1}b_n=a_n$,可得$b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$,由$a_{n+1}=a_n^2+a_n$,可得$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+1}$,故$b_n=\frac{1}{a_n+1}$. 因为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$,所以$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$,所以$S_{100}=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}-\frac{1}{a_{101}}=1-\frac{1}{a_{101}}$. 由题意可知$a_n>0$,则$a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$,故$\{a_n\}$为递增数列. 因为$a_1=1$,所以$0<\frac{1}{a_{101}}<1$,故$S_{100}=1-\frac{1}{a_{101}}\in(0,1)$,所以$k$的最小值为1.

17.【解析】(1)由题设可得,$c(\sin B+\cos B)=a$,

由正弦定理,可得$\sin B\sin C+\cos B\sin C=\sin A$, …… 2分

又因为$A=\pi-(B+C)$,所以$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,

所以$\sin B\sin C=\sin B\cos C$, …… 4分

因为$B,C\in(0,\pi)$,

所以得$\sin C=\cos C$,则$C=\frac{\pi}{4}$. …… 6分

(2)因为$c=2,a=\sqrt{2}b$,

由余弦定理得,$(\sqrt{2}b)^2+b^2-2\cdot\sqrt{2}b\cdot b\cos\frac{\pi}{4}=4$, …… 8分

整理得$b^2=4$,

故$b=2,a=2\sqrt{2}$. …… 10分

$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2$. …… 12分

18.【解析】(1)连接$AC_1$,因为四边形$A_1ACC_1$为菱形,所以$AC_1\perp A_1C$. …… 1分

因为$BC\perp AC,BC\perp CC_1,AC\cap CC_1=C$,

所以$BC\perp$平面$ACC_1A_1$,且$A_1C\subset$平面$ACC_1A_1$,所以$A_1C\perp BC$.

因为$BC/\!/B_1C_1$,所以$A_1C\perp B_1C_1$, …… 3分

又因为 $AC_1\cap B_1C_1=C_1$，所以 $A_1C\perp$平面 $AB_1C_1$， …………………………………… 4 分

又 $AB_1\subset$平面 $AB_1C_1$，所以 $A_1C\perp AB_1$. …………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $BC\perp$平面 $A_1ACC_1$，

所以平面 $A_1ACC_1\perp$平面 $ABC$，

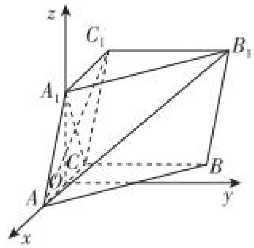
作 $A_1O\perp AC$ 于点 $O$，则 $A_1O\perp$平面 $ABC$，

因为四边形 $A_1ACC_1$ 为菱形，$\angle A_1AC=60°$，所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形，

所以 $O$ 为 $AC$ 的中点.

以 $O$ 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OA_1}$的方向分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. ……………………………………… 6 分




设 $AC=BC=C_1C=2$，则 $A(1,0,0)$，$B(-1,2,0)$，$B_1(-2,2,\sqrt{3})$，$C(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，

设平面 $ABB_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}-2x_1+2y_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

可取 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. ………………………………………………………… 8 分

设平面 $CBB_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}2y_2=0\\ -x_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，

可取 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,1)$. ………………………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{4}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角 $A-BB_1-C$ 的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由已知数据和参考数据得

$\bar{x}=\dfrac{2+3+4+5}{4}=3.5$，$\bar{y}=\dfrac{26+39+49+54}{4}=42$， …………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=47$，$\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=5$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}\approx2.2$， ………………… 4 分

$r=\dfrac{47}{2.2\times21.4}\approx0.998$. ………………………………………………………… 5 分

因为 $y$ 与 $x$ 的相关系数近似为 0.998，说明 $y$ 与 $x$ 的线性相关程度相当高，从而可以用线性回归模型拟合 $y$ 与 $x$ 的关系. ……………………………………………………………… 6 分

(2)$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{47}{5}=9.4$， ……………………………………… 7 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=42-9.4\times3.5=9.1$. …………………………………………… 8 分

所以回归方程为 $\hat{y}=9.4x+9.1$. ……………………………………………………… 9 分

(3)当 $x=9$ 时，$\hat{y}=9.4\times9+9.1=93.7<100$， ……………………………………… 10 分

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=9.4\times10+9.1=103.1>100$， …………………………………… 11 分

所以，到 2025 年沙漠治理面积可突破 100 万亩. ……………………………………… 12 分

20.【解析】(1)设 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 $F(-c,0)$，令 $x=-c$，则 $y^2=\dfrac{b^4}{a^2}$，从而$\dfrac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}b^2$，

又因为$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2c^2$， ………………………………………………… 2 分

解得 $a=\sqrt{2}, b=1$,

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………… 4 分

(2)设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$,当 $k=0$ 时,不符合题意. ………… 5 分

当 $k\neq0$ 时,设直线 $AB$: $y=-\frac{1}{k}x+m$,

由 $\begin{cases}x^2+2y^2=2\\ y=-\frac{1}{k}x+m\end{cases}$ 联立,整理得 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{k^2})x^2-\frac{2m}{k}x+m^2-1=0$,

$\Delta=\frac{4m^2}{k^2}-4(\frac{1}{2}+\frac{1}{k^2})(m^2-1)=-2m^2+2+\frac{4}{k^2}>0$,即 $1+\frac{2}{k^2}>m^2$①. ………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{4km}{2+k^2}$, $x_1x_2=\frac{2k^2(m^2-1)}{2+k^2}$,

$y_1+y_2=-\frac{1}{k}(x_1+x_2)+2m=\frac{2mk^2}{2+k^2}$.

$y_1y_2=(-\frac{1}{k}x_1+m)(-\frac{1}{k}x_2+m)=\frac{1}{k^2}x_1x_2-\frac{m}{k}(x_1+x_2)+m^2=\frac{k^2m^2-2}{2+k^2}$. ………… 7 分

$AB$ 的中点 $K(\frac{2km}{2+k^2},\frac{k^2m}{2+k^2})$在直线 $l$ 上,

则 $\frac{k^2m}{2+k^2}=k\times\frac{2km}{2+k^2}+\frac{1}{2}$,整理得 $m=-\frac{2+k^2}{2k^2}$②. ………… 8 分

②式代入①式整理得 $3k^4+4k^2-4>0$,

解得 $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 9 分

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{2k^2(m^2-1)}{2+k^2}+\frac{k^2m^2-2}{2+k^2}=0$,

整理得 $3k^2m^2-2k^2-2=0$③. ………… 10 分

将②式代入③得 $5k^4-4k^2-12=0$, $k=\pm\sqrt{2}$,且满足 $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 11 分

所以 $k=\pm\sqrt{2}$,故直线 $l$ 的方程为 $y=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$,或 $y=-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$. ………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}(x>0)$,

由 $x>0$,可知有 $f'(x)>0$,

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………… 2 分

因为 $f(1)=e>0$, $f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln2<0$.

所以函数 $f(x)$有唯一零点 $x_0$,且$\frac{1}{2}<x_0<1$. ………… 4 分

(2)由 $x(e^x-a)\geqslant\ln(ex)$,整理得 $a\leqslant e^x-\frac{\ln(ex)}{x}$,

设 $g(x)=e^x-\frac{\ln(ex)}{x}$, $g'(x)=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$,

由(1)可知 $f(x)=x^2e^x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,

存在唯一零点 $x_0$,且$\frac{1}{2}<x_0<1$.

当 $x\in(0,x_0)$时, $f(x)<0$, $g'(x)<0$, $g(x)$单调递减,

当 $x\in(x_0,+\infty)$时, $f(x)>0$, $g'(x)>0$, $g(x)$单调递增. ………… 6 分

即 $g(x_0)$ 为 $g(x)$ 在定义域内的最小值，所以 $a\leqslant e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}$，

因为 $f(x_0)=0$，所以 $x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}(\frac{1}{2}<x_0<1)$①， ………… 8 分

令 $h(x)=xe^x$，$\frac{1}{2}<x<1$，

方程①等价于 $h(x_0)=h(-\ln x_0)(\frac{1}{2}<x_0<1)$，

而 $h'(x)=(x+1)e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于零，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(x_0)=h(-\ln x_0)$ 等价于 $x_0=-\ln x_0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$． ………… 10 分

故 $g(x)$ 的最小值 $g(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{-x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=1$，

所以 $a\leqslant 1$，

所以 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$． ………… 12 分

22.【解析】(1)根据曲线 $C_1$ 的参数方程可得，$(x-a)^2+(y-b)^2=1$，

因为 $a^2+b^2=1$，所以曲线 $C_1$ 是经过坐标原点且半径为 1 的动圆． ………… 2 分

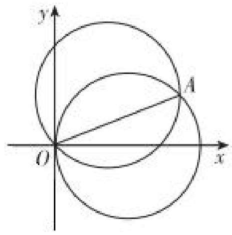
由 $C_2$ 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$，可得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，则有 $x^2+y^2=2x$，整理得 $(x-1)^2+y^2=1$，

所以曲线 $C_2$ 是圆心为 $(1,0)$，半径为 1 的圆． ………… 4 分

结合图形可知，若 $C_1$ 与 $C_2$ 有且只有 1 个公共点，则两圆外切，从而 $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=2$，又 $a^2+b^2=1$，

解得 $a=-1$，$b=0$． ………… 5 分

(2)当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，曲线 $C_1$ 的普通方程为 $x^2+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$，




曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2-\sqrt{2}\rho\cos\theta-\sqrt{2}\rho\sin\theta=0$，即 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$． …… 7 分

由(1)可知 $O$ 为曲线 $C_1$，$C_2$ 的一个交点，设另一交点为 $(\rho_0,\theta_0)$，

联立曲线 $C_1$，$C_2$ 方程得 $2\cos\theta_0=\sqrt{2}\cos\theta_0+\sqrt{2}\sin\theta_0$．

整理得 $(\sqrt{2}-1)\cos\theta_0=\sin\theta_0$， ………… 8 分

因为 $\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0=1$，解得 $\cos^2\theta_0=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，

则 $|AB|^2=\rho_0^2=4\cos^2\theta_0=2+\sqrt{2}$． ………… 10 分

23.【解析】(1) $|x-a|+|x+b|\geqslant|(x-a)-(x+b)|=|a+b|$．

因为 $a>0$，$b>0$，$f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$，

则有 $a+b=2$． ………… 2 分

因为 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}=1$（当且仅当 $a=b$ 时取等号），

所以 $a+b\geqslant 2ab$． ………… 4 分

(2)由题意可知 $a+b=1-c$，即 $a+b+c=1$， ………… 5 分

$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}$，

根据基本不等式可知 $\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$，同理 $\frac{1-b}{b}\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}$，$\frac{1-c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}$， ………… 8 分

则有 $\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$，

即 $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}\geqslant 8$． ………… 10 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。


**关注后获取更多资料：**

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》