

保密★启用前

肇庆市 2022 届高中毕业班第三次教学质量检测

数 学

2022.3

本试卷共 4 页,22 小题,满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡指定位置上,将条形码横贴在答题卡右上角“贴条形码区”。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的清洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 4\}$, 集合 $A = \{0, 1\}$, 则 $\complement_U A =$
A. $\{0, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 2, 3\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $(1+3i)z = 5i$, 则 z 的虚部是
A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
3. 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$
A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$
4. 下列函数是奇函数,且函数值恒小于 1 的是
A. $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ B. $f(x) = -x^2 + x$
C. $f(x) = |\sin x|$ D. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$
5. 下图是战国时期的一个铜铍,其由两部分组成,前段是高为 2 cm、底面边长为 1 cm 的正三棱锥,后段是高为 0.6 cm 的圆柱,圆柱底面圆与正三棱锥底面的正三角形内切,则此铜铍的体积约为



- A. 0.25 cm^3 B. 0.65 cm^3 C. 0.15 cm^3 D. 0.45 cm^3

数学试题 第 1 页(共 4 页)

6. 为提高新农村的教育水平,某地选派 4 名优秀的教师到甲、乙、丙三地进行为期一年的支教活动,每人只能去一个地方,每地至少派一人,则不同的选派方案共有
A. 18 种 B. 12 种 C. 72 种 D. 36 种
7. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时,发现有这样一列数:1,1,2,3,5,⋯,其中从第三项起,每个数等于它前面两个数的和,即 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$,后来人们把这样的一列数组成的数列 $\{a_n\}$ 称为“斐波那契数列”.记 $a_{2022} = t$,则 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2021} =$
A. t^2 B. $t-1$ C. t D. $t+1$
8. 已知当 $x \in (0, +\infty)$ 时,函数 $f(x) = ke^x$ 的图象与函数 $g(x) = \frac{2x}{2x+1}$ 的图象有且只有两个交点,则实数 k 的取值范围是
A. $(0, \frac{\sqrt{e}}{2e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 若 $a > b$,则下列不等式中正确的有
A. $a-b > 0$ B. $2^a > 2^b$ C. $ac > bc$ D. $a^2 > b^2$
10. 某市为了研究该市空气中的 PM2.5 浓度和 SO₂ 浓度之间的关系,环境监测部门对该市空气质量进行调研,随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 浓度和 SO₂ 浓度(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$),得到如下所示的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO ₂	SO ₂	
	[0,150]	(150,475]
[0,75]	64	16
(75,115]	10	10

经计算 $k = \frac{100 \times (64 \times 10 - 16 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 74 \times 26} \approx 7.4844$,则可以推断出

- A. 该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 $75 \mu\text{g}/\text{m}^3$,且 SO₂ 浓度不超过 $150 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的概率估计值是 0.64
B. 若 2×2 列联表中的天数都扩大到原来的 10 倍, K^2 的观测值不会发生变化
C. 有超过 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关
D. 在犯错的概率不超过 1% 的条件下,认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P 是线段 BD_1 上(不含端点)的任意一点, 点 E 是线段 A_1B 的中点, 点 F 是平面 $ABCD$ 内一点, 则下面结论中正确的有

- A. $CD \parallel$ 平面 PBC_1
 B. 以 A_1 为球心、 $\sqrt{2}$ 为半径的球面与该正方体侧面 DCC_1D_1 的交线长是 $\frac{\pi}{2}$
 C. $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 D. $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{2}{3}$

12. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, 过点 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , l_1 与 C 相交于 A, B 两点, l_2 与 C 相交于 E, D 两点, M 为 A, B 中点, N 为 E, D 中点, 直线 l 为抛物线 C 的准线, 则

- A. 点 M 到直线 l 的距离为定值
 B. 以 $|AB|$ 为直径的圆与 l 相切
 C. $|AB| + |DE|$ 的最小值为 32
 D. 当 $|MN|$ 最小时, $MN \parallel l$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (-1, -2)$, $b = (-x, 3)$, 若 $a \parallel b$, 则 $x =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}$, $g(x) = -\ln x$, 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$), 若 $h(x)$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 过原点 O 的直线 l 交椭圆 C 于点 A, B , 且 $2|FO| = |AB|$, 若 $\angle BAF = \frac{\pi}{6}$, 则椭圆 C 的离心率是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $f(\frac{\pi}{3} + x) = f(\frac{\pi}{3} - x)$, $f(-\frac{\pi}{3}) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2})$ 上有且只有一个极大值点, 则 ω 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $8a_3 = a_6$, $a_2 + a_5 = 36$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 并证明: $T_n < \frac{1}{3}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C = \sin^2 A$.

(1) 求角 A 的大小;

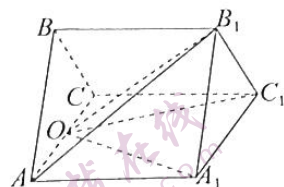
(2) 若 $a = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 四边形 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC = 60^\circ$, O 是 AC 的中点.

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 B_1OA_1 ;

(2) 求二面角 $A-OB_1-C_1$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

中医药传承数千年,治病救人济苍生. 中国工程院院士张伯礼在接受记者采访时说:“中医药在治疗新冠肺炎中发挥了核心作用,能显著降低轻症病人发展为重症病人的几率,对改善发热、咳嗽、乏力等症状,中药起效非常快,对肺部炎症的吸收和病毒转阴都有明显效果.”2021 年 12 月某地爆发了新冠疫情,医护人员对确诊患者进行积极救治. 现有 6 位症状相同的确诊患者,平均分成 A, B 两组, A 组服用甲种中药, B 组服用乙种中药. 服药一个疗程后, A 组中每人康复的概率都为 $\frac{13}{15}$, B 组 3 人康复

的概率分别为 $\frac{9}{10}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$.

(1) 设事件 C 表示 A 组中恰好有 1 人康复, 事件 D 表示 B 组中恰好有 1 人康复, 求 $P(CD)$;

(2) 若服药一个疗程后, 每康复 1 人积 2 分, 假设认定: 积分期望值越高药性越好, 请问甲、乙两种中药哪种药性更好?

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 实轴长是 8.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过点 $P(0, 3)$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同的两点 A 和 B , 若直线 l 上存在不同于点 P 的点 D 满足 $|PA| \cdot |DB| = |PB| \cdot |DA|$ 成立, 证明: 点 D 的纵坐标为定值, 并求出该定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = axe^{ax} + (a+b)x$, $g(x) = (1+x)\ln x$.

(1) 当 $a = -b = 1$ 时, 证明: 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > g(x)$;

(2) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都 $\exists b \in [-1, 0]$, 使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

肇庆市 2022 届高中毕业班第三次教学质量检测

数学参考答案及评分标准

2022.3

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】C

【解析】因为集合 $U = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{0, 1\}$ ，所以 $\complement_U A = \{2, 3\}$ ，故选 C。

2. 【答案】B

【解析】因为 $z = \frac{5i}{1+3i} = \frac{5i(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{5(3+i)}{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ ，所以 z 的虚部是 $\frac{1}{2}$ ，故选 B。

3. 【答案】B

【解析】由 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ， $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，得 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，

所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，故选 B。

4. 【答案】A

【解析】因为 $-f(-x) = -\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = \frac{2^x-1}{2^x+1} = f(x)$ ，所以函数 $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 为奇函数；

因为 $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1} = 1 - \frac{2}{2^x+1}$ ，又 $2^x > 0$ ，所以 $-1 < 1 - \frac{2}{2^x+1} < 1$ ，故 A 正确；

函数 $f(x) = -x^2 + x$ 非奇非偶，故 B 错误；

函数 $f(x) = |\sin x|$ 为偶函数，故 C 错误；

因为 $f(8) = 8^{\frac{1}{3}} + 8^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{2} > 1$ ，故 D 错误，故选 A。

5. 【答案】D

【解析】因为正三棱锥的底面边长为 1，所以其内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，由三棱锥体积与圆柱体积公式可得

$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ \times 2 + \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \times 0.6 \approx 0.45(\text{cm}^3)$ ，故选 D。

6. 【答案】D

【解析】4 名教师分为 3 组，有 C_4^2 种方法，然后再分别派到甲、乙、丙三地，共有 $C_2^1 A_3^3$ 种方案，所以共有 36 种选派方案。故选 D。

数学参考答案及评分标准 第 1 页(共 8 页)

7.【答案】C

【解析】由 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 得 $a_{2022} = a_{2021} + a_{2020} = a_{2021} + a_{2019} + a_{2018} = \cdots = a_{2021} + a_{2019} + \cdots + a_3 + a_2 = a_{2021} + a_{2019} + \cdots + a_3 + a_1 = t$. 故选 C.

8.【答案】A

【解析】由题设, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $k = \frac{2x}{e^x(2x+1)}$, 令 $h(x) = \frac{2x}{e^x(2x+1)}$, 则 $h'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{e^x(2x+1)^2}$, 所以当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 单调递增; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 单调递减. 又 $h(x) > 0$, $h(x) \leq h(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{2e}$, 所以当 $0 < k < \frac{\sqrt{e}}{2e}$ 时, 直线 $y=k$ 与 $h(x)$ 的图象有两个交点, 即函数 $f(x) = ke^x$ 的图象与函数 $g(x) = \frac{2x}{2x+1}$ 的图象有且只有两个交点. 故选 A.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9.【答案】AB

【解析】对于 A 选项, 因为 $a > b$, 所以 $a - b > 0$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 因为函数 $f(x) = 2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 所以 $2^a > 2^b$, 故 B 正确;

对于 C 选项, 当 $c \leq 0$ 时, $ac > bc$ 不成立, 故 C 不正确;

对于 D 选项, 当 $a = 1, b = -2$ 时, $a^2 = 1 < b^2 = 4$, 故 D 不正确. 故选 AB.

10.【答案】ACD

【解析】补充完整列联表如下:

PM2.5 \ SO ₂	[0, 150]	(150, 475]	合计
[0, 75]	64	16	80
(75, 115]	10	10	20
合计	74	26	100

对于 A 选项, 该市一天中, 空气中 PM2.5 浓度不超过 75 $\mu\text{g}/\text{m}^3$, 且 SO₂ 浓度不超过 150 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 的概率估计值为 $\frac{64}{100} = 0.64$, 故 A 正确;

对于 B 选项, $k = \frac{1000 \times (64 \times 100 - 16 \times 100)^2}{800 \times 200 \times 740 \times 260} \approx 74.844 \neq 7.484$, 故 B 不正确;

因为 $7.484 > 6.635$, 根据临界值表可知, 在犯错的概率不超过 1% 的条件下, 即有超过 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关, 故 C, D 均正确. 故选 ACD.

数学参考答案及评分标准 第 2 页 (共 8 页)

11. 【答案】ABD

【解析】对于 A 选项, 因为平面 PBC_1 即为平面 ABC_1D_1 , 又因为 $C_1D_1 \parallel CD$, 且 $C_1D_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1 , $CD \not\subset$ 平面 ABC_1D_1 , 所以 $CD \parallel$ 平面 PBC_1 , 故 A 正确;

对于 B 选项, 该球面与侧面 DCC_1D_1 的交线长为 $\frac{\pi}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, D 选项, 将 $\triangle DBD_1$ 沿 BD_1 翻折到与 $\triangle A_1BD_1$ 在同一平面且点 A_1, D 在直线 BD_1 的异侧, 作 $EG \perp BD$ 于点 G , 此时 $|EG| = \frac{2}{3}$, 则 $|EP| + |PF|$ 的最小值是 $\frac{2}{3}$, 故 C 不正确, D 正确. 故选 ABD.

12. 【答案】BCD

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), E(x_3, y_3), D(x_4, y_4), M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$, 直线 l_1 的方程为 $x = my + 2$, 则直线 l_2 的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2$.

将直线 l_1 的方程 $x = my + 2$ 代入 $y^2 = 8x$, 化简整理得 $y^2 - 8my - 16 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = 8m, y_1 y_2 = -16$,

故 $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 4 = 8m^2 + 4$. 所以 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = 4m^2 + 2, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = 4m$.

因为点 A 到直线 l 的距离 $d_1 = x_1 + 2$, 点 B 到直线 l 的距离 $d_2 = x_2 + 2$, 点 M 到直线 l 的距离 $d_M = x_M + 2$,

又 $x_M = 4m^2 + 2$, 所以 $d_M = 4m^2 + 4$, 故 A 错误;

因为 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 4 = 8m^2 + 8 = 2d_M$, 所以以 $|AB|$ 为直径的圆的圆心 M 到 l 的距离为 $\frac{|AB|}{2}$, 即以 $|AB|$ 为直径的圆与 l 相切, 故 B 正确;

同理, $x_3 + x_4 = -\frac{1}{m}(y_3 + y_4) + 4 = 8\frac{1}{m^2} + 4$, 所以 $x_N = \frac{4}{m^2} + 2, y_N = -\frac{4}{m}$, $|ED| = |EF| + |DF| = x_3 + x_4 + 4 = 8\frac{1}{m^2} + 8$,

则 $|AB| + |ED| = 8m^2 + 8\frac{1}{m^2} + 16 \geq 32$, 当且仅当 $m = \pm 1$ 时等号成立, 故 C 正确;

$|MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{\left(4m^2 - \frac{4}{m^2}\right)^2 + \left(4m + \frac{4}{m}\right)^2} = 4\sqrt{m^4 + \frac{1}{m^4} + m^2 + \frac{1}{m^2}}$.

设 $m^2 + \frac{1}{m^2} = t$, 则 $m^2 + \frac{1}{m^2} = t \geq 2, m^4 + \frac{1}{m^4} = t^2 - 2$, $|MN| = 4\sqrt{t^2 + t - 2}$.

当 $t = 2$ 时, 即 $m = \pm 1$ 时, $|MN|$ 最小, 这时 $x_N = x_M$, 故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】因为 $a \parallel b$, 所以 $2x = -3$, 解得 $x = -\frac{3}{2}$, 故填 $-\frac{3}{2}$.

14. 【答案】 $\left(-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$

【解析】若 $h(x)$ 恰有 3 个零点, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在两个零点,

$$\text{故} \begin{cases} 0 < -\frac{a}{2} < 1, \\ f(1) = 1 + a + \frac{1}{2} > 0, \\ \Delta = a^2 - 4 \times \frac{1}{2} > 0, \end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2} < a < -\sqrt{2}$. 故填 $\left(-\frac{3}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

15. 【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】设右焦点为 F' , 连接 AF' , BF' . 因为 $2|OF| = |AB| = 2c$, 即 $|FF'| = |AB|$, 可得四边形 $AFF'B'$ 为矩形. 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $|AF| = 2c \cdot \cos \angle BAF = \sqrt{3}c$, $|BF| = 2c \cdot \sin \angle BAF = c$.

由椭圆的定义可得 $|AF| + |AF'| = 2a$, 所以 $2a = (\sqrt{3} + 1)c$, 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$, 故填 $\sqrt{3} - 1$.

16. 【答案】 $\frac{33}{4}$

【解析】由题意知, $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \text{ 则 } \begin{cases} \omega = \frac{3(2k+1)}{4}, \\ \varphi = \frac{k'\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad k, k' \in \mathbb{Z}, \text{ 其中 } k = k_2 - k_1,$

$k' = k_2 + k_1 = 2k_2 - k$. 当 $k' = -1$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $k = 2k_2 + 1$, $k_2 \in \mathbb{Z}$; 当 $k' = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $k = 2k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$. 又 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有一个极大值点, 所以 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} \leq 2T = \frac{4\pi}{\omega}$, 得 $0 < \omega \leq 10$, 即 $0 < \frac{3(2k+1)}{4} \leq 10$, 所以 $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{37}{6}$.

当 $k = 6$ 时, $\omega = \frac{39}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 此时 $\frac{39}{4}x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{49}{40}\pi, \frac{41}{8}\pi\right)$, 此时有 2 个极大值点, 舍去;

当 $k = 5$ 时, $\omega = \frac{33}{4}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 此时 $\frac{33}{4}x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{23}{40}\pi, \frac{31}{8}\pi\right)$, 此时有 1 个极大值点, 成立,

所以 ω 的最大值为 $\frac{33}{4}$, 故填 $\frac{33}{4}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1) 解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q , 首项是 a_1 .

由 $8a_3 = a_5$, 可得 $q = 2$ 2 分

由 $a_2 + a_5 = 36$, 可得 $a_1 q (1 + q^3) = 36$, 所以 $a_1 = 2$, 3 分

所以 $a_n = 2^n$ 4 分

数学参考答案及评分标准 第 4 页 (共 8 页)

(2)证明:因为 $b_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$, 6分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \left(\frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^2+1}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{2^3+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$
 $= \frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$ 8分

又 $\frac{1}{2^{n+1}+1} > 0$, 所以 $T_n < \frac{1}{3}$ 10分

18. 解:(1)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $b^2 + c^2 + bc = a^2$ 2分

由余弦定理得, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ 4分

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 5分

(2)由 $a = \sqrt{3}$ 和(1)可知 $b^2 + c^2 + bc = 3$, 6分

则 $3 = (b+c)^2 - bc \geq (b+c)^2 - \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{3(b+c)^2}{4}$, 8分

得 $4 \geq (b+c)^2$, 即 $b+c \leq 2$, 10分

所以 $a+b+c \leq 2+\sqrt{3}$ (当且仅当 $b=c=1$ 时, 取得等号),

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2+\sqrt{3}$ 12分

19. (1)证明:因为四边形 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC = 60^\circ$, 所以 $A_1O \perp AC$ 1分

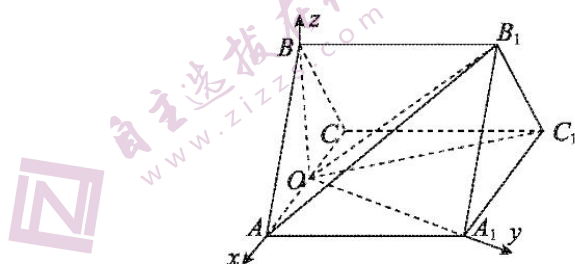
因为平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$, 所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC , 所以 $A_1O \perp BC$ 2分

因为 $B_1C_1 \parallel BC$, 所以 $B_1C_1 \perp A_1O$ 3分

又 $B_1C_1 \perp B_1A_1$, 且 $OA_1 \cap B_1A_1 = A_1$, 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 B_1OA_1 4分

所以 $BC \perp$ 平面 B_1OA_1 5分

(2)解:如图, 连接 BO .



因为 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, O 是 AC 的中点, 所以 $BO \perp AC$. 又因为平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 平面 $ABC \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AC$, 所以 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1 6分

设 $AC=2$, 建立空间直角坐标系, 则 $O(0,0,0), A(1,0,0), B_1(-1,\sqrt{3},1), C_1(-2,\sqrt{3},0), \dots$

..... 7 分

$$\overrightarrow{OA}=(1,0,0), \overrightarrow{OB_1}=(-1,\sqrt{3},1), \overrightarrow{OC_1}=(-2,\sqrt{3},0).$$

设平面 AOB_1 的法向量是 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OA}=0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OB_1}=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1=0, \\ -x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0, \end{cases}$$

取 $z_1=\sqrt{3}$, 可得 $\mathbf{m}=(0, -1, \sqrt{3})$ 9 分

设平面 C_1OB_1 的法向量是 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OC_1}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OB_1}=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_2+\sqrt{3}y_2=0, \\ -x_2+\sqrt{3}y_2+z_2=0, \end{cases}$$

取 $x_2=\sqrt{3}$, 可得 $\mathbf{n}=(\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3})$ 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-5}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以二面角 $A-OB_1-C_1$ 的余弦值是 $-\frac{\sqrt{10}}{4}$ 12 分

$$20. \text{解: (1) 依题意有, } P(C) = C_3^1 \times \frac{13}{15} \times \left(1 - \frac{13}{15}\right)^2 = \frac{52}{1125}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(D) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又事件 C 与 D 相互独立,

$$\text{则 } P(CD) = P(C)P(D) = \frac{52}{1125} \times \frac{3}{32} = \frac{13}{3000},$$

$$\text{所以 } P(CD) = \frac{13}{3000}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 A 组中服用甲种中药康复的人数为 X_1 , 则 $X_1 \sim B(3, \frac{13}{15})$,

$$\text{所以 } E(X_1) = 3 \times \frac{13}{15} = \frac{13}{5}.$$

设 A 组的积分为 X_2 , 则 $X_2 = 2X_1$,

$$\text{所以 } E(X_2) = 2E(X_1) = \frac{26}{5}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设 B 组中服用乙种中药康复的人数为 Y_1 , 则

$$P(Y_1=0) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{160},$$

$$P(Y_1=1) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times C_2^1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{160},$$

$$P(Y_1=2)=C_2^1 \times \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{63}{160},$$

$$P(Y_1=3)=\frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{160},$$

故 Y_1 的分布列为

Y_1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{160}$	$\frac{15}{160}$	$\frac{63}{160}$	$\frac{81}{160}$

所以 $E(Y_1)=0 \times \frac{1}{160} + 1 \times \frac{15}{160} + 2 \times \frac{63}{160} + 3 \times \frac{81}{160} = \frac{384}{160} = \frac{12}{5}$ 10 分

设 B 组的积分为 Y_2 , 则 $Y_2=2Y_1$,

所以 $E(Y_2)=E(2Y_1)=2E(Y_1)=\frac{24}{5}$ 11 分

因为 $\frac{26}{5} > \frac{24}{5}$,

所以甲种中药药性更好. 12 分

21. (1) 解: 依题意得, $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ 2a=8, \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a^2=16, \\ b^2=4, \end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程是 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(x_0, y_0)$, 直线 l 的方程为 $y=kx+3$.

将直线方程 $y=kx+3$ 代入双曲线方程 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, 化简整理得 $(1-4k^2)x^2 - 24kx - 52 = 0$,

$$\Delta = (-24k)^2 + 4 \times (1-4k^2) \times 52 = 208 - 256k^2,$$

则 $x_1+x_2 = \frac{24k}{1-4k^2}, x_1x_2 = -\frac{52}{1-4k^2}$ 6 分

要使直线与双曲线的右支有两个不同的交点 A 和 B, 则应满足

$$\begin{cases} 1-4k^2 \neq 0, \\ \Delta > 0, \\ x_1+x_2 > 0, \\ x_1x_2 > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 1-4k^2 \neq 0, \\ 208-256k^2 > 0, \\ \frac{24k}{1-4k^2} > 0, \\ -\frac{52}{1-4k^2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad -\frac{\sqrt{13}}{4} < k < -\frac{1}{2}. \quad (\text{无这个范围, 也不扣分})$$

由 $|PA| \cdot |DB| = |PB| \cdot |DA|$, 得 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|DA|}{|DB|}$, 故 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0-x_1}{x_2-x_0}$, 8 分

$$\text{所以 } x_0 = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{\frac{-104}{1-4k^2}}{\frac{24k}{1-4k^2}} = -\frac{13}{3k}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又 } y_0 = kx_0 + 3 = -\frac{13}{3} + 3 = -\frac{4}{3},$$

$$\text{所以点 } D \text{ 的纵坐标为定值 } -\frac{4}{3}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (1) 证明: 当 $a = -b = 1$ 时, $f(x) = xe^x$,

$$\text{令 } h(x) = e^x - (x+1) (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(0) = 0$,

$$\text{所以 } h(x) = e^x - (x+1) > 0, \text{ 即 } e^x > x+1. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = x - \ln x (x > 0), \text{ 则 } \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \text{ 所以 } \varphi(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 在 } (1, +\infty)$$

上单调递增, 且 $\varphi(1) = 1$, 所以 $\varphi(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$,

$$\text{所以 } x > \ln x. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $xe^x > x(x+1) > (x+1)\ln x$,

$$\text{所以当 } x \in (0, +\infty) \text{ 时, } f(x) > g(x). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 解: 因为 $\exists b \in [-1, 0]$, 使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 令 $\psi(b) = axe^{ax} + (a+b)x$,

只需 $\psi(b)_{\max} \geq g(x)$, 即 $axe^{ax} + ax \geq (1+x)\ln x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

整理得 $ax(e^{ax} + 1) \geq (x+1)\ln x = \ln x(e^{\ln x} + 1)$. (*) $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

设 $F(x) = x(e^x + 1)$, 则 $F'(x) = e^x(x+1) + 1$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

又 $F''(x) = (x+2)e^x$, 可得 $x > -2$ 时, $F''(x) > 0$, $F'(x)$ 单调递增; $x < -2$ 时, $F''(x) < 0$, $F'(x)$

单调递减, 因此当 $x = -2$ 时, $F'(x)$ 有最小值 $F'(-2) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以 (*) 式即 $F(ax) \geq F(\ln x)$, 所以 $ax \geq \ln x$, 即 $a \geq \frac{\ln x}{x}$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

设 $G(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $G'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $G'(x) = 0$, 解得 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $G'(x) > 0$, 函数 $G(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $G'(x) < 0$, 函数 $G(x)$ 单调递减.

所以 $G(x)_{\max} = G(e) = \frac{1}{e}$, 所以 $a \geq \frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{1}{e}, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线