准考证号______

绝密★启用前

湘豫名校联考(2022年3月)

数学(理科)试卷

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。时间120分钟,满分150分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 命题"$\exists x\geqslant 0, 2^x+x-2\leqslant 0$"的否定是 (　　)

A. $\forall x\geqslant 0, 2^x+x-2\leqslant 0$　　B. $\forall x\geqslant 0, 2^x+x-2>0$

C. $\exists x\geqslant 0, 2^x+x-2>0$　　D. $\exists x\geqslant 0, 2^x+x-2<0$

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x<\log_3 10\}$, $B=\{y\mid y=x^2, x\in A\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $[0,1]$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,4\}$

3. 已知复数 $z_0=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}-1$($\mathrm{i}$ 表示虚数单位),复数 z 满足 $|z-z_0|=1$,则 $|z|$ 的取值范围是 (　　)

A. $[0,1]$　　B. $[0,4]$　　C. $[0,2]$　　D. $[1,2]$

4. 高一学生小李在课间玩耍时不慎将一个篮球投掷到一个圆台状垃圾篓中,恰好被上底口(半径较大的圆)卡住,球心到垃圾篓底部的距离为 $5\sqrt{10}a$,垃圾篓上底面直径为 $24a$,下底面直径为 $18a$,母线长为 $13a$,则该篮球的表面积为 (　　)

A. $154\pi a^2$　　B. $\dfrac{616}{3}\pi a^2$　　C. $308\pi a^2$　　D. $616\pi a^2$

5. 已知不等式组 $\begin{cases} x+2y\leqslant 4, \\ x\leqslant 2, \\ y\geqslant 0, \\ x\geqslant 1 \end{cases}$ 表示的平面图形为 τ,则按斜二测画法,平面图形 τ 的直观图

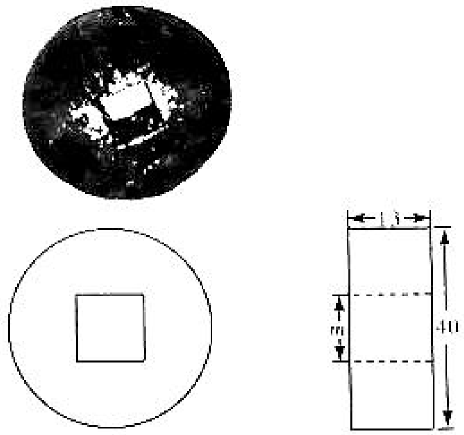
的面积为 （　　）

A. $\frac{5\sqrt{2}}{16}$　　B. $\frac{5\sqrt{2}}{8}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

6. 由数字1，2，3组成六位数（数字可以不完全使用），若每个数字最多出现三次，则这样的六位数的个数是 （　　）

A. 420　　B. 450　　C. 510　　D. 520

7. 某老物件收藏者购买了清代老榉木的大铜钱形状的水车轮子，正面以颇具传统文化意味的"古钱币"为外形，预示着财源广进，事业发达，也可以理解为象征中国传统文化的天圆地方，其正视图和侧视图（单位：厘米）如图所示（图中 $m<10$），且该轮子的表面积为$(1\ 320\pi+240)$平方厘米，若向轮子的正面随机投掷一颗小石子，则恰好落到正方形中的概率为 （　　）



正视图　　侧视图

A. $\frac{1}{16\pi}$　　B. $\frac{1}{8\pi}$

C. $\frac{1}{4\pi}$　　D. $\frac{1}{2\pi}$

8. 已知定义在R上的函数 $f(x)=(|x|-1)\cdot(x+a)$ 为奇函数，则不等式 $\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)<0$ 的解集为 （　　）

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D. $(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$

9. 已知△ABC中，$AC+BC=4$，$AB=2\sqrt{3}$，O为AB的中点，P为AB的垂直平分线上一点，且$OP=\frac{1}{2}$，则CP的最大值为 （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{39}}{3}$　　D. 4

10. 已知曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点$(0,0)$处的切线为l，数列$\{a_n\}$的首项为1，点(a_n,a_{n+1}) $(n\in N^*)$为切线l上一点，则数列$\left\{\frac{6-n}{a_n}\right\}$中的最小项为 （　　）

A. $-\frac{2}{3^5}$　　B. $-\frac{2}{3^7}$　　C. $-\frac{1}{3^6}$　　D. $\frac{1}{3^5}$

11. 已知锐角△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\cdot\tan C$，且$c=1$，则△$ABC$面积的取值范围为 （　　）

A. $(0,2)$　　B. $\left(1,\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

12. 已知$a>0$，$b>0$，且$b\ln(a+1)=a\ln(b+2)$，则下列不等式恒成立的个数是 （　　）

①$a^3<b^3$；②$e^b+e^{-a}>e^a+e^{-b}$；③$a-\frac{1}{b}<b-\frac{1}{a}$；④$\frac{b}{a}>\frac{b^a}{a^b}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷(非选择题 共90分)

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$,则该双曲线的倾斜角为锐角的渐近线的一个方向向量的坐标为________.

14. 为了弘扬中华民族敬老爱老的传统美德,切实关爱社区老年人的身体健康,社区卫生服务中心联合医院为老年人进行免费体检,并送上健康的祝福.已知重阳节当天,医院彩超室接待了80岁以上的老年人5位,70岁到80岁之间的老年人3位,为了进一步了解各年龄阶段老年人的健康情况,现从8人中随机抽取3人,则抽取的3人中80岁以上的老年人人数的数学期望为________.

15. 已知将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $g(x)$的图象,若函数 $g(x)\geqslant 3x+m$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$时恒成立,则实数 m 的最大值是________.

16. 在$\triangle ABC$中,$AB=4$,$AC=1$,P 为边 AB 上一点,$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{3}$,则$\angle BAC=$________;$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最小值为________.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17.(本小题满分12分)

在2021年的一次车展上,某国产汽车厂家的一个品牌推出了1.5升混动版和纯电动版两款车型,自这两款车型上市后,便获得了不错的口碑,汽车测评人老李通过自媒体平台,对市场上这个品牌汽车车主的性别情况进行了调查统计.

(1)统计数据得到如下2×2列联表:

	混动版	纯电动版	合计
男		25	
女	15		60
合计	70		

请将上述2×2列联表补充完整,并判断是否有99.9%的把握认为喜欢哪款车型和性别有关;

(2)若两款汽车的操控性能优秀率均为$\frac{2}{3}$,动力性能优秀率均为$\frac{3}{4}$,老李又对这两款车型进行操控性能和动力性能测试(假设进行的各项测试之间互相不影响),求两款车型的这两项测试中恰有2项指标优秀的概率.

附:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2n^2-5n$. 正项非常数等比数列$\{b_n\}$的首项为 1，且$b_3+4b_2=b_4+4b_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

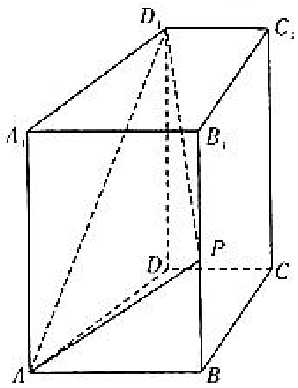
(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 T_n，并写出 T_n 的最小值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp CD$，$AB/\!/CD$，$BC=\sqrt{3}$，$AA_1=AB=AD=2$，且 P 为 BB_1 的中点.

(1)设过 B 点的平面为 α，若平面 $\alpha/\!/$平面 APD_1，求平面 α 与四边形 B_1BCC_1 和四边形 C_1CDD_1 交线的长度之和；

(2)求平面 APD_1 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知点 P 是抛物线 $C:x^2=4(y+3)$ 的顶点,过点 $(0,-1)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点,点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心.

(1)试问:直线 l 与点 M 的轨迹是否有交点?若有,请求出交点坐标;若没有,请说明理由.

(2)若在点 M 的轨迹上存在不关于 y 轴对称的两点 G,H,使直线 PG 与直线 PH 关于 y 轴对称,求证:直线 GH 必过定点.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-2ax(a>0)$,$F'(x)=f(x)$ 且 $F(0)=1$.

(1)若 $x\geqslant0$ 时,不等式 $F(x)\geqslant x+1$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(2)当 $a=1$ 时,求函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上的零点个数.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22~23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分 10 分)选修 4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{6}\cos\alpha-\sqrt{6}\sin\alpha, \\ y=\sqrt{6}\cos\alpha+\sqrt{6}\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.直线 l 的极坐标方程为 $\rho(m\cos\theta+\sin\theta)+3m=\sqrt{3}$.直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点.

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点,若 $|AB|=2\sqrt{3}$,求 $|CD|$.

23.(本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-t|+|x+3|$.

(1)若对任意的 $x\in[-3,+\infty)$,$f(x)\geqslant 4$ 恒成立,求正实数 t 的最小值 M;

(2)若 $ab>0$,$(a+b)(a^3+b^3)=M$,求证:$a^2+b^2\leqslant\sqrt{2}$.

湘豫名校联考(2022年3月)

数学(理科)参考答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	B	B	C	D	A	C	A	D	C	C	D	B

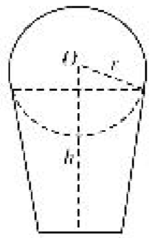
1.B 【解析】特称命题的否定为全称命题,将"∃"变为"∀","≤"变为">"即可.故选B.

2.B 【解析】因为集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\mid -2<x<\log_3 10\}=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{y\mid y=x^2,x\in A\}=\{0,1,4\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$.故选B.

3.C 【解析】因为 $z_0=\frac{2}{1-i}-1=\frac{2(1+i)}{2}-1=i$,所以 $|z-i|=1$.

方法一:$1=|z-i|\leqslant|z|+|i|=|z|+1$,$1=|z-i|\geqslant|z|-|i|=|z|-1$,即 $0\leqslant|z|\leqslant 2$.故选C.

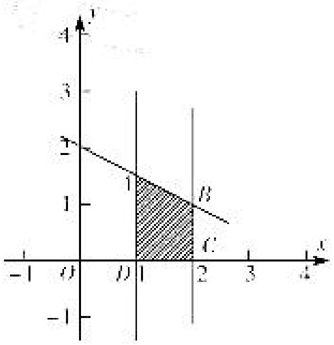
方法二:复数 z 对应的点在以 $(0,1)$ 为圆心,1为半径的圆上,所以 $0\leqslant|z|\leqslant 2$.故选C.



4.D 【解析】球与垃圾篓组合体的轴截面图如右图所示.根据题意,得垃圾篓的高为 $h=\sqrt{(13a)^2-(12a-9a)^2}=4\sqrt{10}a$,所以球心到上底面的距离为 $\sqrt{10}a$.

设篮球的半径为 r,则 $r^2=10a^2+(12a)^2=154a^2$,故篮球的表面积为 $4\pi r^2=616\pi a^2$.故选D.

5.A 【解析】绘制不等式组表示的平面区域,如图中阴影部分所示,则 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $B(2,1)$, $C(2,0)$, $D(1,0)$.



按照斜二测画法,直角梯形 $ABCD$ 的直观图为梯形,且两底边长分别为 $\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}$,高为 $1\times\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以直观图的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{16}$.故选A.

6.C 【解析】所求的六位数分三类.第一类:一个数字出现0次,另外两个数字各出现3次,有 $C_3^1C_6^3=60$ 个;

第二类:一个数字出现1次,一个数字出现2次,一个数字出现3次,有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$ 个;

第三类:每个数字出现2次,有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 个.所以共有 $60+360+90=510$ 个满足题意的六位数.故选C.

7.A 【解析】根据轮子的正视图和侧视图,可得该轮子的形状是底面直径为40厘米,高为13厘米的圆柱体,挖去一个底面是正方形,高为13厘米的直四棱柱而构成.所以其表面积为圆柱的表面积加上直四棱柱的侧面积,减去上下两个正方形的面积.所以 $S=2\pi\times20\times13+\pi\times20^2\times2+4m\times13-2m^2=1\ 320\pi+210$,解得 $m=5$ 或 $m=21$(舍去).所以恰好落到正方形中的概率为 $\frac{5\times5}{\pi\times20^2}=\frac{1}{16\pi}$.故选A.

8.D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=-a=0$,即 $a=0$.

所以 $f(x)=(|x|-1)x$，化简，得 $f(x)=\begin{cases}x^2-x,x\geqslant 0,\\ -x^2-x,x<0.\end{cases}$

因为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)<0$，所以 $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\ f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\ f(x)>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $-1<x<0$，故选 D.

9．C 【解析】以 AB 的中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系（图略）．由椭圆的定义知，点 C 的轨迹是以 A，B 为左、右焦点的椭圆（不含长轴两端点），其标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$．设 $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$C(x,y)$，$y\neq 0$，

则 $|CP|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{4(1-y^2)+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{-3\left(y+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{3}}$，因为 $-1\leqslant y\leqslant 1$，且 $y\neq 0$，

所以当 $y=-\frac{1}{6}$ 时，$|CP|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{39}}{3}$，故选 C.

10．C 【解析】因为 $y'=3(2x+1)e^x+3(x^2+x)e^x=3(x^2+3x+1)e^x$，所以曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=3$，所以切线 l 的方程为 $y=3x$，所以 $a_{n+1}=3a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，所以 $\frac{6-n}{a_n}=\frac{6-n}{3^{n-1}}$，所以由 $\begin{cases}\frac{6-n}{3^{n-1}}\leqslant\frac{5-n}{3^n},\\ \frac{6-n}{3^{n-1}}\leqslant\frac{7-n}{3^{n-2}},\end{cases}$ 解得 $\frac{13}{2}\leqslant n\leqslant\frac{15}{2}$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=7$，所以数列 $\left\{\frac{6-n}{a_n}\right\}$ 中的最小项为 $\frac{6-7}{3^6}=-\frac{1}{3^6}$，故选 C.

11．D 【解析】因为 $\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{\sqrt{3}\tan A\tan C-\sqrt{3}}{1-\tan A\tan C}$

$=\frac{\sqrt{3}(\tan A\tan C-1)}{1-\tan A\tan C}=-\sqrt{3}$，

所以 $\tan B=-\tan(A+C)=\sqrt{3}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{1}{2}<a<2$，

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}a\in\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故选 D.

12．B 【解析】易知 $\frac{\ln(a+1)}{a}=\frac{\ln(b+2)}{b}>\frac{\ln(b+1)}{b}$，

设 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$，

设 $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{(x+1)^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(0)=0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $a>0$，$b>0$，且 $f(a)>f(b)$，所以 $0<a<b$，

因为 $y=x^3$ 为增函数，所以 $a^3<b^3$，①恒成立，

设 $y=e^x-e^{-x}$，则该函数为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

因为 $b>a$，所以 $e^b-e^{-b}>e^a-e^{-a}$，即 $e^b+e^{-a}>e^a+e^{-b}$，②恒成立.

$a-\frac{1}{b}-\left(b-\frac{1}{a}\right)=a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}$.

因为 $0<a<b$，所以 $a-b<0$，但不能判断 ab 与 1 之间的大小关系，③不恒成立.

因为当 $b=2$，$a=1$ 时，$\frac{b}{a}=\frac{b^a}{a^b}$，所以①不恒成立.

故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1,2)$[答案不唯一，形如$(m,2m)(m\neq0)$均正确] **【解析】**因为 $\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以 $\frac{b}{a}=2$，所以倾斜角为锐角的渐近线的斜率为 2，故向量 $\boldsymbol{d}=(1,2)$ 为该渐近线的一个方向向量.

14. $\frac{15}{8}$ **【解析】**用随机变量 X 表示抽取的 3 人中 80 岁以上的老年人人数，则 X 可能的取值为 0，1，2，3，且

$P(X=k)=\frac{C_5^k\cdot C_3^{3-k}}{C_8^3}(k=0,1,2,3)$，所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{56}+1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{30}{56}+3\times\frac{10}{56}=\frac{15}{8}$.

15. $\frac{1}{2}$ **【解析】**根据题意，得 $g(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，由 $g(x)\geqslant3x+m$，得 $m\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3x$.

令 $M(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，则 $M'(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3$.

$\therefore M'(x)<0$ 恒成立，$\therefore M(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 上单调递减.

$\therefore M(x)_{\min}=M(0)\geqslant m$，即 $m\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore m$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

16. $\frac{\pi}{3}$；$-\frac{49}{16}$（第一空 2 分，第二空 3 分） **【解析】**设 $\angle BAC=\theta$，以 A 为原点，AC 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系（图略），则 $A(0,0)$，$C(1,0)$，设 $B(4\cos\theta,4\sin\theta)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(4\cos\theta,4\sin\theta)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0)$.

所以 $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=|(2+2\cos\theta,2\sin\theta)|=\sqrt{8+8\cos\theta}=2\sqrt{3}$.

所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，因为 $0<\theta<\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，所以 $B(2,2\sqrt{3})$，设 $P(m,\sqrt{3}m)(0\leqslant m\leqslant2)$，则

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(2-m,2\sqrt{3}-\sqrt{3}m)\cdot(1-m,-\sqrt{3}m)=4m^2-9m+2=4\left(m-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{49}{16}$.

所以当 $m=\frac{9}{8}$ 时，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 取得最小值 $-\frac{49}{16}$.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共60分.

17.(本小题满分12分)

【解析】(1)男：55　80

女：45

合计：70　140 ……………………………………………………………………………… (2分)

(列出表格也得分，其他形式答案正确即可得分).

由于 $K^2=\dfrac{140\times(55\times45-15\times25)^2}{70\times70\times80\times60}=26.25>10.828$, ……………………………… (4分)

所以有99.9%的把握认为喜欢哪款车型和性别有关. ………………………………………… (5分)

(2)记 Y 表示混动版测试指标优秀的项目数，Z 表示纯电动版测试指标优秀的项目数，则"两款车型这两项测试中恰有2项指标优秀"的概率为

$P(Y+Z=2)=P(Y=0,Z=2)+P(Y=1,Z=1)+P(Y=2,Z=0)$ ………………………………… (6分)

$=P(Y=0)P(Z=2)+P(Y=1)P(Z=1)+P(Y=2)P(Z=0)$ ……………………………………… (8分)

$=\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\left[\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{3}{4}\right]^2+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times$

$\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{37}{144}$. ………………………………………………………………………… (12分)

18.(本小题满分12分)

【解析】(1)当 $n\geqslant2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-5n-2(n-1)^2+5(n-1)=4n-7$, ……………………………………… (2分)

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-3$，适合上式.

$\therefore a_n=4n-7, n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………………………………………… (3分)

根据题意，设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $q>0$，且 $q\neq1$.

$\because b_3+4b_2=b_1+4b_3$, $\therefore b_3-b_1=4(b_3-b_2)$. ……………………………………………… (4分)

$\because q>0$，且 $q\neq1$,

$\therefore q^2=4$, $\therefore q=2$ 或 $q=-2$(舍去).

$\therefore b_n=2^{n-1}$. ……………………………………………………………………………… (6分)

(2)$\because T_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n$,

$\therefore T_n=(-3)\times1+1\times2+5\times2^2+\cdots+(4n-11)\times2^{n-2}+(4n-7)\times2^{n-1}$, ①

$\therefore 2T_n=(-3)\times2+1\times2^2+5\times2^3+\cdots+(4n-11)\times2^{n-1}+(4n-7)\times2^n$, ② ……………… (8分)

由②－①，得

$T_n=(4n-7)\times2^n-4(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})+3=(4n-11)\times2^n+11$. ……………………… (10分)

$\because T_n-T_{n-1}=(4n-11)\times2^n+11-[4(n-1)-11]\times2^{n-1}-11=(4n-7)\times2^{n-1}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时，$T_n>T_{n-1}$, $\therefore T_n$ 单调递增, $\therefore (T_n)_{\min}=T_1=-3$. ………………………… (12分)

19.(本小题满分12分)

【解析】(1)因为在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\parallel CD$, $BB_1\parallel CC_1$,

所以平面 $ABB_1A_1\parallel$ 平面 DCC_1D_1. ……………………………………………………… (1分)

如图，取 DD_1 的中点 E，连接 BE，在矩形 D_1DBB_1 中，$BE\parallel PD_1$,

因为 $BE\not\subset$ 平面 APD_1, $PD_1\subset$ 平面 APD_1，所以 $BE\parallel$ 平面 APD_1. ………………………… (2分)

取 AB 的中点 G，PB 的中点 H，连接 GH，则 $GH\parallel AP$.

取 $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CC_1}$，连接 GD, DQ, HQ, EF, BF.

因为 $BC\perp CD$，$AB// CD$，$BC=\sqrt{3}$，$AB=AD=2$，所以 $AG=GB=DC=1$，

所以 $HQ// GD$，且 $HQ=GD$，

所以四边形 $DGHQ$ 为平行四边形，所以 $GH// DQ$。

因为 $ED// FQ$，且 $ED=FQ$，所以四边形 $EDQF$ 为平行四边形，所以 $EF// DQ$，

所以 $GH// EF$，所以 $EF// AP$。 …………………………………………………………………………（3 分）

因为 $EF\not\subset$ 平面 APD_1，$AP\subset$ 平面 APD_1，所以 $EF//$ 平面 APD_1，又 $BE\cap EF=E$，

所以平面 $BEF//$ 平面 APD_1，所以平面 α 即为平面 BEF。 ………………………………………（4 分）

所以 BF，EF 分别为平面 α 与四边形 B_1BCC_1 和四边形 C_1CDD_1 的交线。

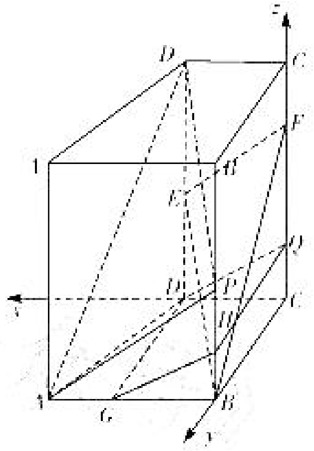
因为 $EF=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BF=\sqrt{3+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$，

所以平面 α 与四边形 B_1BCC_1 和四边形 C_1CDD_1 交线的长度之和为 $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{21}}{2}$。 ……………………（6 分）

（2）以 C 为原点，CD 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，CC_1 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$，则 $C(0,0,0)$，$P(0,\sqrt{3},1)$，$D_1(1,0,2)$，$A(2,\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,1)$， ……………………………………………（7 分）

设平面 APD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,y,z)$，则



$\begin{cases}\overrightarrow{AP_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2+z=0,\\ -1-\sqrt{3}y+2z=0,\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},2)$， ……………………………………………………………（9 分）

取平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，则

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………（11 分）

故平面 APD_1 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。 …………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

（1）设直线 AB 的方程为 $y=kx-1$，

联立方程，得 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2-3,\\ y=kx-1,\end{cases}$ 化简，得 $x^2-4kx-8=0$，

所以 $\Delta=16k^2+32>0$，$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-8$， ………………………………………………（2 分）

若直线 l 与点 M 的轨迹有交点，则 $PA\perp PB$，

易知 $P(0,-3)$，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得 $x_1x_2+y_1y_2+3(y_1+y_2)+9=0$，

因为 $y_1+y_2=4k^2-2$，$y_1y_2=-12k^2+1$，代入上式不成立，

所以直线 l 与点 M 的轨迹没有交点。 ……………………………………………………………（4 分）

（2）因为点 M 是 $\triangle PAB$ 的外接圆的圆心，

所以点 M 是 $\triangle PAB$ 三条边的中垂线的交点，

设线段 PA 的中点为 F，线段 PB 的中点为 E，

因为 $P(0,-3)$，

所以 $F\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1-3}{2}\right)$，$E\left(\frac{x_2}{2},\frac{y_2-3}{2}\right)$，$k_{PA}=\frac{y_1+3}{x_1}$，$k_{PB}=\frac{y_2+3}{x_2}$， ……………………（5 分）

所以线段 PA 的中垂线的方程为 $y-\frac{y_1-3}{2}=-\frac{x_1}{y_1+3}\left(x-\frac{x_1}{2}\right)$，

因为A在抛物线C上，所以 $y_1+3=\frac{1}{4}x_1^2$.

所以PA的中垂线的方程为 $y-\frac{x_1^2}{8}+3=-\frac{4}{x_1}\left(x-\frac{x_1}{2}\right)$，即 $y=-\frac{4}{x_1}x+\frac{x_1^2}{8}-1$.

同理可得线段PB的中垂线的方程为 $y=-\frac{4}{x_2}x+\frac{x_2^2}{8}-1$. ……………………（6分）

联立方程，得 $\begin{cases} y=-\frac{4}{x_1}x+\frac{x_1^2}{8}-1, \\ y=-\frac{4}{x_2}x+\frac{x_2^2}{8}-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_M=-\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{32}, \\ y_M=\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2-8}{8}. \end{cases}$ ……………………（7分）

由(1)可得 $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-8$.

所以 $x_M=-\frac{-8\times 4k}{32}=k$，$y_M=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{8}=\frac{(x_1+x_2)^2}{8}=2k^2$，即 $M(k,2k^2)$.

所以 $x_M^2=\frac{1}{2}y_M$.

所以点M的轨迹方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$. ……………………（9分）

方法一：设直线GH的方程为 $y=mx+b$，且 $m\neq 0, b>0$，$G(x_3,y_3)$，$H(x_4,y_4)$.

联立方程，得 $\begin{cases} x^2=\frac{1}{2}y, \\ y=mx+b, \end{cases}$ 化简，得 $x^2-\frac{1}{2}mx-\frac{b}{2}=0$.

所以 $\Delta=\frac{1}{4}m^2+2b>0$，$x_3+x_4=\frac{1}{2}m$，$x_3x_4=-\frac{b}{2}$. ……………………（10分）

根据题意，得直线PG与直线PH的斜率之和为0.

所以 $k_{PG}+k_{PH}=\frac{y_3+3}{x_3}+\frac{y_4+3}{x_4}=\frac{x_4y_3+x_3y_4+3(x_3+x_4)}{x_3x_4}$

$=\frac{x_4(mx_3+b)+x_3(mx_4+b)+3(x_3+x_4)}{x_3x_4}=0$. ……………………（11分）

所以 $x_4(mx_3+b)+x_3(mx_4+b)+3(x_3+x_4)=2mx_3x_4+(b+3)(x_3+x_4)=2m\left(-\frac{b}{2}\right)+(b+3)\cdot\frac{m}{2}=$

$-\frac{m}{2}(b-3)=0$.

$\because m\neq 0$，$\therefore b=3$.

所以直线GH必过定点(0,3). ……………………（12分）

方法二：设 $H(x_3,2x_3^2)$，$G(x_4,2x_4^2)$ 是满足条件的两点，则 $x_3+x_4\neq 0$.

所以 $k_{HG}=\frac{2x_3^2-2x_4^2}{x_3-x_4}=2(x_3+x_4)$，$k_{PH}=\frac{2x_3^2+3}{x_3}$，$k_{PG}=\frac{2x_4^2+3}{x_4}$. ……………………（10分）

由 $k_{PH}+k_{PG}=0$，即 $\frac{(x_3+x_4)(2x_3x_4+3)}{x_3x_4}=0$，得 $x_3x_4=-\frac{3}{2}$. ……………………（11分）

直线HG的方程为 $y-2x_3^2=2(x_3+x_4)(x-x_3)$. ……………………（12分）

整理，得 $y=2(x_3+x_4)x-2x_3x_4$，即 $y=2(x_3+x_4)x+3$.

所以直线HG必过定点(0,3).

21.（本小题满分 12 分）

【解析】(1)根据题意，得 $F(x)=e^x-ax^2+C$.

因为 $F(0)=1$，所以 $C+1=1$，所以 $C=0$，所以 $F(x)=e^x-ax^2$.

由 $F(x)\geqslant x+1$ 恒成立，得 $e^x-ax^2-x-1\geqslant 0$ 恒成立. ……………………（1 分）

令 $t(x)=e^x-ax^2-x-1$，$x\geqslant 0$，则 $t'(x)=e^x-2ax-1$.

设 $u(x)=t'(x)$，则 $u'(x)=e^x-2a$. ……………………（2 分）

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，即 $0<2a\leqslant 1$ 时，$u'(x)\geqslant 0$，所以 $t'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$t'(x)\geqslant t'(0)=0$.

所以 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t(x)\geqslant t(0)=0$.

所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 符合题意. ……………………（3 分）

②当 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $u'(x)=e^x-2a=0$，得 $x=\ln 2a>0$.

所以 $t'(x)$ 在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，因为 $t'(0)=0$.

所以当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，$t'(x)<0$.

所以 $t(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减，因为 $t(0)=0$.

所以当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，$t(x)<0$，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$. ……………………（5 分）

(2)由已知得 $g(x)=e^x-2x-\cos x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$，则 $g'(x)=e^x+\sin x-2$. ……………………（6 分）

①当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，因为 $g'(x)=(e^x-1)+(\sin x-1)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减.

所以 $g(x)>g(0)=0$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上无零点. ……………………（7 分）

②当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，因为 $g'(x)$ 单调递增，且 $g'(0)=-1<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $g'(x_0)=0$.

当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)>0$. ……………………（8 分）

所以 $g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，且 $g(0)=0$，所以 $g(x_0)<0$.

设 $h(x)=e^x-2x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $h'(x)=e^x-2$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln 2$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $\left(\ln 2,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$.

所以 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$，所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$.

所以 $g(x_0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在一个零点.

所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 2 个零点. ……………………（9 分）

③当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)=e^x+\sin x-2>e^{\frac{\pi}{2}}-3>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上无零点. …………（11 分）

综上所述，$g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上的零点个数为 2. …………（12 分）

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22～23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

【解析】(1)由题意，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=12$. …………（3 分）

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho(m\cos\theta+\sin\theta)+3m=\sqrt{3}$，得直线 l 的直角坐标方程为 $mx+y+3m-\sqrt{3}=0$.
…………（5 分）

(2)设圆心到直线 $l: mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 的距离为 d.

则弦长 $|AB|=2\sqrt{12-d^2}=2\sqrt{3}$，解得 $d=3$. …………（6 分）

所以 $\dfrac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=3$，解得 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{3}y+6=0$. …………（8 分）

所以直线 l 的倾斜角为 $\theta=30^\circ$.

所以 $|CD|=\dfrac{|AB|}{\cos 30^\circ}=4$. …………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

【解析】(1)根据题意，$f(x)\geq 4$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geq 4$ 恒成立，

因为 $f(x)=|2x-t|+|x+3|=\begin{cases}3x-t+3, & x\geq\frac{t}{2},\\ 3+t-x, & -3\leq x<\frac{t}{2},\end{cases}$ …………（1 分）

所以当 $x\in[-3,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{t}{2}+3$. …………（3 分）

所以 $\frac{t}{2}+3\geq 4$，即 $t\geq 2$，所以 t 的最小值为 $M=2$. …………（5 分）

(2)因为 $2=(a+b)(a^3+b^3)=a^4+ab^3+a^3b+b^4\geq a^4+2\sqrt{ab^3\cdot a^3b}+b^4=(a^2+b^2)^2$，…………（8 分）

当且仅当 $a^2=b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取等号.

所以 $a^2+b^2\leq\sqrt{2}$. …………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。