百校联盟 2021届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分150分，测试时间120分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-1\leqslant 0\}$，$B=\{x|1-2x<0\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$

A. $[-1,\frac{1}{2}]$　　A　　B. $(-\infty,1]$

C. $[\frac{1}{2},1]$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 若 $z=1-i$，则 $|\frac{z+1}{z-1}|=$

A. 1　　(1,-1)　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2

3. 曲线 $y=\ln x-x^2$ 的一条切线的斜率为 -1，则该切线的方程为

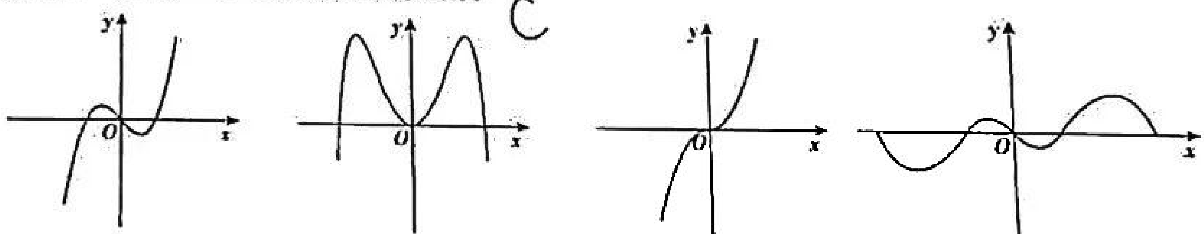
A. $2x+2y-1=0$　　$y'=\frac{1}{x}-2x=-1$　　B　　B. $x+y=0$

C. $2x+2y+1=0$　　$x=1$　　D. $x+y-1=0$

4. 已知 $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=1$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}=$

A. -1　　B. 1　　A　　C.　　D. 2

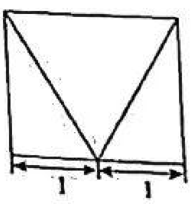
5. 函数 $f(x)=|x|(e^x-e^{-x})$ 的部分图象大致为　　C



6. 已知 $a+b=(-1,3)$，$a-b=(3,1)$，则 $\cos\langle a,b\rangle=$

A. 0　　$\vec{a}=(1,2)$　$\vec{b}=(-2,1)$　　B. $\frac{1}{4}$　　A　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 底面为正方形且高为 $\sqrt{3}$ 的四棱锥的俯视图如图所示，则其面积最大的侧面的面积为



A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{6}$　　D

C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$　　$\sqrt{8}$

8. 5名同学进入到甲、乙、丙3个社区进行社会实践，若每个社区至少有1名同学，每名同学只能去1个社区，若分配到甲社区的人数不是最少的，则不同的分配方法的种数为

A. 65　　B. 70　　C. 75　　D. 80

9. 已知点 D、O 分别为圆锥的顶点和底面圆心，$\triangle ABC$ 为圆锥底面的内接正三角形，$AD=AB$，则异面直线 AD 与 BO 所成角的余弦值为　B

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 10 个不同的数排成 4 行，第 1 行 1 个数，第 2 行 2 个数，第 3 行 3 个数，第 4 行 4 个数，设 a_k 是第 k（$k=1,2,3,4$）行中的最大数，则 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 的概率为

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{2}{15}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

11. 已知 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，线段 OF 的垂直平分线与双曲线 C 的渐近线交于 P，Q 两点，$|PQ|=2|OF|$，则双曲线 C 的离心率为　D

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}b_n=a_n$，若 $S_{10}<k(k\in \mathbf{Z})$，则 k 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分，第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-\lambda$，则 $\lambda=$ __2__.

14. 光衰减是指光量子的能量衰减，能量衰减意味着频率的降低，光量子在传播途中损失能量，同样会降低频率。在试验环境下，光在某种介质的传播过程中光量子的衰减过程可以用指数模型：$E(t)=E_0e^{-Kt}$ 描述光量子的能量 $E(t)$（单位：10^{-19} 焦耳）随时间 t（单位，毫秒）的变化规律，其中 E_0 为光量子能量的初始值，常数 K 为试验参数。若试验中光量子能量的初始值 $E_0=36\times 10^{-19}$ 焦耳，100 毫秒后光量子的能量降低为 8×10^{-19} 焦耳，据此可得实验参数 K 的估计值为 __0.015__.（结果精确到 0.001，$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 3\approx 1.10$）

15. 已知 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 $a=$ __$\frac{\pi}{4}$__.

16. 已知抛物线 $C:x^2=2y$，圆 $M:x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，若圆 M 与抛物线 C 有且只有一个公共点，则 a 的取值范围是________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

中国是世界上沙漠化最严重的国家之一，沙漠化造成生态系统失衡，可耕地面积不断缩小，对中国工农业生产和人民生活带来严重影响。随着综合国力逐步增强，西北某地区大力兴建防风林带，引水拉沙，引洪淤地，开展了改造沙漠的巨大工程，该地区于 2017 年投入沙漠治理经费 2 亿元，从 2018 年到 2020 年连续 3 年每年增加沙漠治理经费 1 亿元，近 4 年沙漠治理经费投入 x（亿元）和沙漠治理面积 y（万亩）的相关数据如下表所示：

年份	2017	2018	2019	2020
x	2	3	4	5
y	26	39	49	54

$\bar{x}=3.5$　$\bar{y}=42$

(1) 由上表数据可知，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求出 y 关于 x 的回归直线方程；

(2) 若保持以往的沙漠治理经费增加幅度，请预测到哪一年沙漠治理面积突破 100 万亩。

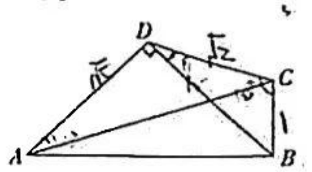
参考公式：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

18.（本小题满分 12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$CD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}$，$\angle BCD=135°$，$AD=BD$，$\angle ADB=90°$.

(1)求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2)求 AC 的长.

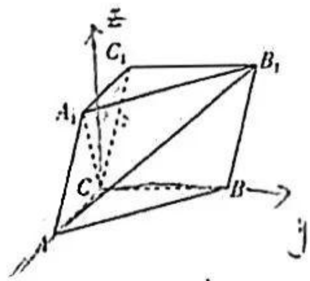


19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle BCC_1=90°$，四边形 ACC_1A_1 是菱形，$\angle ACC_1=120°$.

(1)证明：$A_1C\perp AB_1$；

(2)求二面角 $A-BB_1-C$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过左焦点 F 且与 x 轴垂直的弦长为$\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知 A，B 为椭圆 C 上两点，O 为坐标原点，斜率为 k 的直线 l 经过点 $P(0,\frac{1}{2})$，若 A，B 关于 l 对称，且 $OA\perp OB$，求 l 的方程.

21.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=x^2e^x+\ln x$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有一个零点；

(2)若 $x(e^x-a)\geqslant\ln(ex)$，求 a 的取值范围.

请考生从第22、23题中任选一题作答，并用2B铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑，按所选涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分；不涂，按本选考题的首题进行评分.

22.(本小题满分10分)【选修4—4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\cos\alpha\\y=b+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1)若 $a^2+b^2=1$，C_1 与 C_2 有且只有1个公共点，求 a；

(2)若 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，曲线 C_1，C_2 交于 A，B 两点，求 $|AB|^2$.

23.(本小题满分10分)【选修4—5：不等式选讲】

已知 a,b 为正数，函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|$ 的值域为 $[1-c,+\infty)$.

(1)若 $c=-1$，证明：$a+b\geqslant 2ab$；

(2)若 $c>0$，证明：$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}\geqslant 8$.

百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　理科数学　参考答案

1. A 【解析】$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>\frac{1}{2}\}$，$\complement_R B=\{x|x\leqslant\frac{1}{2}\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}=[-1,\frac{1}{2}]$.

2. D 【解析】由题意 $\frac{z+1}{z-1}=\frac{2+i}{-i}=\frac{(2+i)i}{-i\cdot i}=-1+2i$，则 $|\frac{z+1}{z-1}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

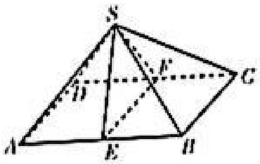
3. B 【解析】设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0-x_0^2)$，由题意得 $y'=\frac{1}{x}-2x$，则该切线的斜率 $k=(\frac{1}{x}-2x)|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}-2x_0=-1$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$（舍去），则该切线的方程为 $x+y=0$.

4. A 【解析】$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha=1$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$. 因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\tan\frac{2\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=-1$.

5. C 【解析】$f(-x)=|-x|(e^{-x}-e^{x})=-|x|(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，函数图象关于原点中心对称，排除 B 选项；当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$0<e^{-x}<1$，$e^x-e^{-x}>0$，且 $|x|>0$，故 $f(x)=|x|(e^x-e^{-x})>0$，排除 A，D 选项.

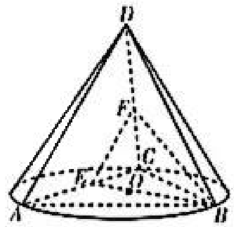
6. A 【解析】设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-1\\y_1+y_2=3\end{cases}$，且 $\begin{cases}x_1-x_2=3\\y_1-y_2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-2\\y_2=1\end{cases}$，即 $a=(1,2)$，$b=(-2,1)$，则有 $\cos\langle a,b\rangle=0$.

7. C 【解析】结合俯视图可知，直观图如图所示，面积最大的侧面为 $\triangle SCD$，且 $SE=\sqrt{3}$，$SF=\sqrt{7}$，又因为 $CD=2$，所以 $\triangle SCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$.



8. D 【解析】有两种情况，第 1 种情况：甲社区有 2 名同学，另外 2 个社区分别有 2 名和 1 名同学，共有 $C_5^2C_3^2A_2^2=60$ 种；第 2 种情况：甲社区有 3 名同学，另外 2 个社区各有 1 名同学，共有 $C_5^3A_2^2=20$ 种. 则不同的分配方法共有 80 种.

9. B 【解析】如图所示，连接 CD，BD，延长 BO 交 AC 于点 E，取 CD 中点 F，连接 EF，BF. 因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，且 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 E 为 AC 的中点，故 $EF\parallel AD$，则 $\angle BEF$ 即为异面直线 AD 与 BO 所成的角. 设 $AD=AB=2$，则 $EF=1$，$BE=\sqrt{3}$. 由题意可知 $\triangle BCD$ 为等边三角形，则 $BF=\sqrt{3}$，在 $\triangle BEF$ 中，$\cos\angle BEF=\frac{BE^2+EF^2-BF^2}{2BE\cdot EF}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



10. B 【解析】最大一个数在第 4 行的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，在任意排好第 4 行后，余下的 6 个数排在前 3 行，符合要求的排列的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，在任意排好第 3 行后，余下的 3 个数排在前 2 行，符合要求的排列的概率为 $\frac{2}{3}$，故 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 的概率为 $P=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$.

11. D 【解析】不妨设 P 在第一象限，设 PQ 与 x 轴交于点 H，则 $|PH|=|OF|=c$. 因为 PQ 为线段 OF 的垂直平分线，故 $OH=\frac{c}{2}$，在直角三角形 POH 中，$\tan\angle POF=\frac{c}{\frac{c}{2}}=\frac{b}{a}$，整理得 $b=2a$，即 $c^2-a^2=4a^2$，则双曲线

C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

12. A 【解析】由 $a_{n+1}b_n=a_n$，可得 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$，由 $a_{n+1}=a_n^2+a_n$，可得 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+1}$，故 $b_n=\frac{1}{a_n+1}$. 因为 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，所以 $\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，所以 $S_{100}=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}-\frac{1}{a_{101}}=1-\frac{1}{a_{101}}$. 由题意可知 $a_n>0$，则 $a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，故$\{a_n\}$为递增数列. 因为 $a_1=1$，所以 $0<\frac{1}{a_{101}}<1$，故 $S_{100}=1-\frac{1}{a_{101}}\in(0,1)$，所以 k 的最小值为 1.

13. 2 【解析】因为等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-\lambda$，当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=4-\lambda$，当 $n\geq2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$，因为数列$\{b_n\}$为等比数列，则有 $b_1=4-\lambda=2$，所以 $\lambda=2$.

14. 0.015 【解析】根据已知函数模型可知光量子的能量 $E(t)=E_0e^{-Kt}$，且当 $t=100$ 时，$E(t)=8$，则有 $8=36e^{-100K}$，故 $e^{-100K}=\frac{2}{9}$，则 $-100K=\ln\frac{2}{9}=\ln2-2\ln3\approx-1.51$，所以 $K\approx0.015$.

15. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】结合 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，当 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ 时，离坐标原点最近的 x 值为 $-\frac{\pi}{4}$，因为区间$[-a,a]$关于原点对称，所以 $a=\frac{\pi}{4}$.

16. $(0,1]$ 【解析】设 $P(x,y)$ 为抛物线上任意一点，圆心 $M(0,a)$，则有 $|PM|=\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{2y+(y-a)^2}=\sqrt{[y+(1-a)]^2+2a-1}$. 当 $1-a<0$ 时，即 $a>1$，则当 $y=a-1$ 时，$|PM|_{\min}=\sqrt{2a-1}$，则有 $\sqrt{2a-1}\geq a$，解得 $a=1$，不合题意；当 $1-a\geq0$ 时，即 $0<a\leq1$，则当 $y=0$ 时，$|PM|_{\min}=a$；故 a 的取值范围是$(0,1]$.

17.【解析】(1)由已知数据和参考数据得

$\bar{x}=\frac{2+3+4+5}{4}=3.5$，$\bar{y}=\frac{26+39+49+54}{4}=42$，

$\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=47$，$\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=5$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{47}{5}=9.4,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=42-9.4\times3.5=9.1$.

所以回归方程为 $\hat{y}=9.4x+9.1$. …………………………………… 8 分

(2)当 $x=9$ 时，$\hat{y}=9.4\times9+9.1=93.7<100$，

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=9.4\times10+9.1=103.1>100$，

所以，到 2025 年沙漠治理面积可突破 100 万亩. …………………………… 12 分

18.【解析】(1)在$\triangle BCD$中，根据余弦定理可得，

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=1^2+\sqrt{2}^2-2\times1\times\sqrt{2}\times\cos135^\circ=5$，

则 $BD=\sqrt{5}$，所以$\triangle ABD$的面积 $S_{\triangle ABD}=\frac{5}{2}$. …………………………………… 2 分

$\triangle BCD$ 的面积 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\frac{1}{2}$，

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 3. …………………………………… 5 分

(2)在$\triangle BCD$中，由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

所以 $\sin\angle BDC=\frac{\sin135^\circ}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. …………………………………… 7 分

则 $\cos\angle ADC=\cos(\angle BDC+\frac{\pi}{2})=-\sin\angle BDC=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………… 9 分

在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得，

$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cdot\cos\angle ADC=9$，$AC=3$.

所以 AC 长度为 3. ………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)连接 AC_1，因为四边形 A_1ACC_1 为菱形，所以 $AC_1\perp A_1C$. ………………………………… 1 分

因为 $BC\perp AC$，$BC\perp CC_1$，$AC\cap CC_1=C$，

所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1，且 $A_1C\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $A_1C\perp BC$.

因为 $BC/\!/B_1C_1$，所以 $A_1C\perp B_1C_1$. ……………………………………………………………… 3 分

又因为 $AC_1\cap B_1C_1=C_1$，所以 $A_1C\perp$平面 AB_1C_1. ………………………………………………… 4 分

又 $AB_1\subset$平面 AB_1C_1，所以 $A_1C\perp AB_1$. ……………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $BC\perp$平面 A_1ACC_1，

所以平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC.

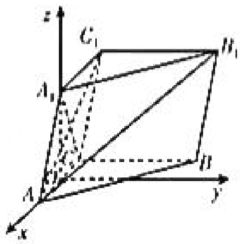
作 $A_1O\perp AC$ 于点 O，则 $A_1O\perp$平面 ABC.

因为四边形 A_1ACC_1 为菱形，$\angle A_1AC=60^\circ$，所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形，

所以 O 为 AC 的中点.

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OA_1}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. ……………………………………… 6 分



设 $AC=BC=C_1C=2$，则 $A(1,0,0)$，$B(-1,2,0)$，$B_1(-2,2,\sqrt{3})$，$C(-1,0,0)$.

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,0,\sqrt{3})$.

设平面 ABB_1 的一个法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ n_1\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}-2x_1+2y_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

可取 $n_1=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. ………………………………………………………………………… 8 分

设平面 CBB_1 的一个法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ n_2\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$，则$\begin{cases}2y_2=0\\ -x_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，

可取 $n_2=(\sqrt{3},0,1)$. ………………………………………………………………………… 10 分

$\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{4}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以二面角 $A-BB_1-C$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)设 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 $F(-c,0)$，令 $x=-c$，则 $y^2=\frac{b^4}{a^2}$，从而$\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}b^2$，

又因为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2c^2$， ……………………………………………………………… 2 分

解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$，当 $k=0$ 时，不符合题意. ………………………………………… 5 分

当 $k\neq0$ 时，设直线 AB：$y=-\frac{1}{k}x+m$，

由$\begin{cases}x^2+2y^2=2\\ y=-\frac{1}{k}x+m\end{cases}$联立，整理得$(\frac{1}{2}+\frac{1}{k^2})x^2-\frac{2m}{k}x+m^2-1=0$.

$\Delta=\frac{4m^2}{k^2}-4(\frac{1}{2}+\frac{1}{k^2})(m^2-1)=-2m^2+2+\frac{4}{k^2}>0$，即 $1+\frac{2}{k^2}>m^2$①. ………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4km}{2+k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2(m^2-1)}{2+k^2}$，

$y_1+y_2=-\frac{1}{k}(x_1+x_2)+2m=\frac{2mk^2}{2+k^2}$，

$y_1y_2=(-\frac{1}{k}x_1+m)(-\frac{1}{k}x_2+m)=\frac{1}{k^2}x_1x_2-\frac{m}{k}(x_1+x_2)+m^2=\frac{k^2m^2-2}{2+k^2}$. ………………………… 7 分

AB 的中点 $K(\frac{2km}{2+k^2},\frac{k^2m}{2+k^2})$ 在直线 l 上，

则 $\frac{k^2m}{2+k^2}=k\times\frac{2km}{2+k^2}+\frac{1}{2}$，整理得 $m=-\frac{2+k^2}{2k^2}$②. ………………………… 8 分

②式代入①式整理得 $3k^4+4k^2-4>0$，

解得 $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 9 分

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{2k^2(m^2-1)}{2+k^2}+\frac{k^2m^2-2}{2+k^2}=0$，

整理得 $3k^2m^2-2k^2-2=0$③. ………………………… 10 分

将②式代入③得 $5k^4-4k^2-12=0$，$k=\pm\sqrt{2}$，且满足 $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 11 分

所以 $k=\pm\sqrt{2}$，故直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$，或 $y=-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$. ………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}(x>0)$，

由 $x>0$，可知有 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 2 分

因为 $f(1)=e>0$，$f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln 2<0$，

所以函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $\frac{1}{2}<x_0<1$. ………………………… 4 分

(2) 由 $x(e^x-a)\geqslant\ln(ex)$，整理得 $a\leqslant e^x-\frac{\ln(ex)}{x}$，

设 $g(x)=e^x-\frac{\ln(ex)}{x}$，$g'(x)=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

由(1)可知 $f(x)=x^2e^x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

存在唯一零点 x_0，且 $\frac{1}{2}<x_0<1$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. ………………………… 6 分

即 $g(x_0)$ 为 $g(x)$ 在定义域内的最小值，所以 $a\leqslant e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}$，

因为 $f(x_0)=0$，所以 $x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}(\frac{1}{2}<x_0<1)$①. ………………………… 8 分

令 $h(x)=xe^x$，$\frac{1}{2}<x<1$，

方程①等价于 $h(x_0)=h(-\ln x_0)(\frac{1}{2}<x_0<1)$，

而 $h'(x)=(x+1)e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于零，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(x_0)=h(-\ln x_0)$ 等价于 $x_0=-\ln x_0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$. ………………………… 10 分

故 $g(x)$ 的最小值 $g(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{-x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=1$.

所以 $a\leqslant 1$,

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)根据曲线 C_1 的参数方程可得,$(x-a)^2+(y-b)^2=1$.

因为 $a^2+b^2=1$,所以曲线 C_1 是经过坐标原点且半径为 1 的动圆. ……………………… 2 分

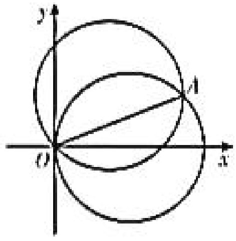
由 C_2 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$,可得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$,则有 $x^2+y^2=2x$,整理得 $(x-1)^2+y^2=1$.

所以曲线 C_2 是圆心为 $(1,0)$,半径为 1 的圆. ……………………………………………… 4 分

结合图形可知,若 C_1 与 C_2 有且只有 1 个公共点,则两圆外切,从而 $\sqrt{(a-1)^2+b^2}=2$,又 $a^2+b^2=1$,

解得 $a=-1,b=0$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$.



曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-\sqrt{2}\rho\cos\theta-\sqrt{2}\rho\sin\theta=0$,即 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$. …… 7 分

由(1)可知 O 为曲线 C_1,C_2 的一个交点,设另一交点为 (ρ_0,θ_0),

联立曲线 C_1,C_2 方程得 $2\cos\theta_0=\sqrt{2}\cos\theta_0+\sqrt{2}\sin\theta_0$,

整理得 $(\sqrt{2}-1)\cos\theta_0=\sin\theta_0$, ……………………………………………… 8 分

因为 $\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0=1$,解得 $\cos^2\theta_0=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

则 $|AB|^2=\rho_0^2=4\cos^2\theta_0=2+\sqrt{2}$. ………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1) $|x-a|+|x+b|\geqslant|(x-a)-(x+b)|=|a+b|$,

因为 $a>0,b>0$,$f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$,

则有 $a+b=2$. ……………………………………………………………………………… 2 分

因为 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}=1$(当且仅当 $a=b$ 时取等号),

所以 $a+b\geqslant 2ab$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知 $a+b=1-c$,即 $a+b+c=1$, ……………………………………………… 5 分

$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}$,

根据基本不等式可知 $\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$,同理 $\frac{1-b}{b}\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}$,$\frac{1-c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}$, ……………………… 8 分

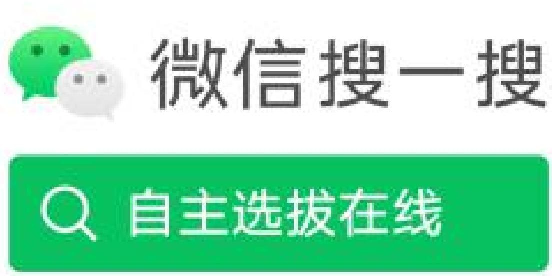
则有 $\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-b}{b}\cdot\frac{1-c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$,

即 $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}\geqslant 8$. ……………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》