

赣州市 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末考试 高三数学（理科）试卷

2023 年 1 月

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $M = \{x | 2^x > 1\}$, $N = \{x | \lg(x^2 - 2x + 4) > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}}(M \cap N) =$

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[3, +\infty)$

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x+3}, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f[f(-1)] =$

- A. -1 B. 0 C. $\ln 2$ D. 2

3. 若数列 $\{a_n + 2\}$ 是等比数列，且 $a_2 = -1, a_4 = 2$, 则 $a_8 =$

- A. -66 B. -64 C. 62 D. 64

4. 为了研究某班学生的右手一拃长 x （单位：厘米）和身高 y （单位：厘米）的关系，从该班随机抽取了 12 名学生，根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系，设其回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，已知 $\sum_{i=1}^{12} x_i = 240, \sum_{i=1}^{12} y_i = 2040$, $\hat{b} = 6.5$ ，若某学生的右手一拃长为 22 厘米，据此估计其身高为

- A. 175 B. 179 C. 183 D. 187

5. 若复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{z}$ 为其共轭复数) 定义: $\underline{z} = -a + bi$, 则对任意的复数 $z = a + bi$, 有下列命题:

$p_1: |z| = |\bar{z}| = |\underline{z}|$; $p_2: \bar{z} + \underline{z} = 0$; $p_3: z \cdot \bar{z} = z \cdot \underline{z}$; p_4 : 若 $b \neq 0$, 则 $\frac{z}{\underline{z}}$ 为纯虚数.

其中正确的命题个数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 程大位(1533~1606), 明朝人, 珠算发明家. 在其杰作《直指算法统宗》里, 有这样一道题: 荡秋千, 平地秋千未起, 踏板一尺离地, 送行二步与人齐, 五尺人高曾记. 仕女佳人争蹴, 终朝笑语欢嬉, 良工高士素好奇, 算出索长有几? 将其译成现代汉语, 其大意是, 一架秋千当它静止不动时, 踏板离地一尺, 将它向前推两步(古人将一步算作五尺)即 10 尺, 秋千的踏板就和人一样高, 此人身高 5 尺, 如果这时秋千的绳索拉得很直, 请问绳索有多长?

- A. 14 尺 B. 14.5 尺 C. 15 尺 D. 15.5 尺

7. 已知过抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点 F 的直线 l 被 C 截得的弦长为 8, 则坐标原点 O 到 l 的距离为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

赣州市期末高三数学(理科)试卷 第1页(共4页)



8. 若 $(2x + \frac{1}{x})^n$ 展开式的各项系数和为 729, $(2x-3)(x-1)^n$ 展开式中 x^3 的系数为
A. -90 B. -30 C. 30 D. 90
9. 直线 $y=2a$ 与双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 交于 M, N 两点, 若 $\triangle MON$ 为直角三角形 (其中 O 为坐标原点), 则双曲线 E 的离心率为
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$
10. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x, x \in (0, \frac{\pi}{4}]$ 的最小值为 a , 则实数 a 的值为
A. -1 B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1
11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AC, BC \perp AC$, 且 $PA = \sqrt{3}, AC = 1, BC = 2, PB = 2\sqrt{2}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为
A. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ B. 4π C. 8π D. 16π
12. 已知 $a = \ln \frac{11}{10}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{2}{21}$, 则
A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > b > a$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22~23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 均为单位向量且夹角为 45° , 则 $|\vec{e}_1 - \sqrt{2}\vec{e}_2| =$ _____ _____ l_1
14. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____ _____ l_2
15. 如图, l_1, l_2, l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 等腰直角三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1, l_2, l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的斜边长可以是 _____ (写出一个即可), _____ l_3
16. 斐波那契, 意大利数学家, 其中斐波那契数列是其代表作之一, 即数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列. 已知数列 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+3} + (-1)^n b_n = n$, 若数列 $\{b_n\}$ 的前 12 项和为 86, 则 $b_1 + b_2 =$ _____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，满足 $\cos B + \sin\left(\frac{A+C}{2}\right) = 0$ 。

(1) 求 B 的值；

(2) 若 AB 与 BC 边上的高之比为 $3:5$ ，且 $b = 7$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

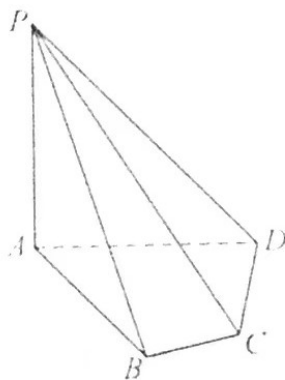
18. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = AB = AD = 3$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ 。

$CB = CD = \sqrt{3}$

(1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ；

(2) 求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值。



19. (本小题满分 12 分)

设有标号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 个小球 (除标号不同外，其余均一样) 和标号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 个盒子，将这 n 个小球任意地放入这 n 个盒子，每个盒子放一个小球，若 i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 号球放入了 i 号盒子，则称该球放对了，否则称放错了。用 ξ 表示放对了的球的个数。

(1) 当 $n = 4$ 时，求 $\xi = 0$ 的概率；

(2) 当 $n = 5$ 时，求 ξ 的分布列与数学期望。

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $Q(1, \frac{3}{2})$ 且离心率为 $\frac{1}{2}$. 过点 $P(1, 2)$ 作两条斜率之和为 0 的直线 l_1, l_2 , l_1 交 C 于 A, B 两点, l_2 交 C 于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在实数 λ 使得 $|PA| \cdot |PB| = \lambda |PM| \cdot |PN|$? 若存在, 请求出 λ 的值, 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + mx^3 + nx^2 - x - 1$ (其中 e 为自然对数的底数). 且曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = ex$.

(1) 求实数 m, n 的值;

(2) 证明: 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) + ex^3 - 2ex^2 \geq 0$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

(t 为参数). 以坐标原点

点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 取相同的单位长度建立极坐标系. 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(4, 3)$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = 2|x+1| + |x+2|$ 的最小值为 m .

(1) 求 m 的值;

(2) 设 a, b, c 为正数, 且 $a+b+c=m$, 求证: $\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{b^2+c^2}{a} \geq 2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线