东北育才学校 2022-2023 学年度高考适应性测试（三）

高 三 数 学

一、单选题（每题只有一个选项是正确答案，每题 5 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\left\{x\mid x^2-x-12\le 0\right\}$，$B=\left\{x\mid x^2-3mx+2m^2+m-1<0\right\}$，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为（　）

A．$[-3,2]$　　B．$[-1,3]$　　C．$\left[-1,\frac{5}{2}\right]$　　D．$\left[2,\frac{5}{2}\right]$

2．《易经》中的“太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦”充分体现了中国古典哲学与现代数学的关系，从直角坐标系中的原点，到数轴中的两个半轴（正半轴和负半轴），进而到平面直角坐标系中的四个象限和空间直角坐标系中的八个卦限，是由简单到繁复的变化过程.现将平面向量的运算推广到 $n(n\ge 3)$ 维向量，用有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $n(n\ge 3)$ 维向量，已知 n 维向量 $\vec{a}=(-1,1,1,\cdots,1)$，$b=(1,1,1,\cdots,1)$，则（　）

A．$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=n-1$　　B．$\vec{a}\cdot\vec{b}=n-1$　　C．$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{n-2}{n}$　　D．存在 $\lambda\in R$ 使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

3．将函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，若函数 $y=g(x)$ 的一个极值点是 $\frac{\pi}{6}$，且在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 ω 的值为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{8}{3}$　　D．$\frac{16}{3}$

4．法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”.他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆.若椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的蒙日圆为 $C:x^2+y^2=\frac{4}{3}a^2$，过 C 上的动点 M 作 Γ 的两条切线，分别与 C 交于 P，Q 两点，直线 PQ 交 Γ 于 A，B 两点，则椭圆 Γ 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

5．数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，现求得 $\{F_n\}$ 的通项公式为 $F_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，$A,B\in\mathbf{R}$，若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8\right]$ 的值为（　）

A．43　　B．44　　C．45　　D．46

6．若集合 $N=\left\{z\mid z=\sqrt{2}\left[\cos(\arcsin t)+i\cdot\cos(\arccos t)\right],t\in R,|t|\le 1\right\}$，$M=\left\{z\mid z=\frac{t}{1+t}+\frac{1+t}{t}i,t\in R,t\ne -1,t\ne 0\right\}$，则 $M\cap N$ 中元素的个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

7．在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=2\sqrt{2}$，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，三棱锥 $A-$

BCD 的所有顶点都在球 O 的球面上，E，F 分别在线段 OB，CD 上运动（端点除外），$BE=\sqrt{2}CF$．当三棱锥 $E-ACF$ 的体积最大时，过点 F 作球 O 的截面，则截面面积的最小值为（　）

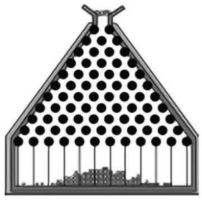
A．π　　B．$\sqrt{3}\pi$　　C．$\dfrac{3}{2}\pi$　　D．2π

8．已知 $a=\ln\dfrac{\pi}{3}$，$b=2\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-2$，$c=\sin 0.04-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}-1\right)$，则 a，b，c 的大小关系是（　）

A．$c>b>a$　　B．$a>b>c$　　C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

二、多选题（每题至少有一个选项为正确答案，少选且正确得 3 分，每题 5 分，共 20 分）

9．如图是一块高尔顿板示意图，在一块木板上钉着若干排互相平行但相互错开的圆柱形小木钉，小木钉之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃，将小球从顶端放入，小球在下落过程中，每次碰到小木钉后都等可能地向左或向右落下，最后落入底部的格子中，格子从左到右分别编号为 $0,1,2,3,\dots,10$，用 X 表示小球落入格子的号码，则（　）



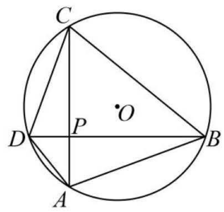
A．$P(X=1)=P(X=9)=\dfrac{5}{512}$

B．$P(X=1)=P(X=9)=\dfrac{1}{1024}$

C．$E(X)=10$

D．$D(X)=\dfrac{5}{2}$

10．“圆幂定理”是平面几何中关于圆的一个重要定理，它包含三个结论，其中一个是相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等．如图，已知圆 O 的半径为 2，点 P 是圆 O 内的定点，且 $OP=\sqrt{2}$，弦 AC，BD 均过点 P，则下列说法正确的是（　）



A．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 为定值

B．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $[-2,0]$

C．当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值

D．$AC\perp BD$ 时，$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值为 12

11．如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$，$CB=2$，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，沿 DE 将 $\triangle ADE$ 进行翻折，连接 AB，AC 得到四棱锥 $A-BCED$（如图 2），点 F 为 AB 的中点，在翻折过程中下列结论正确的是（　）

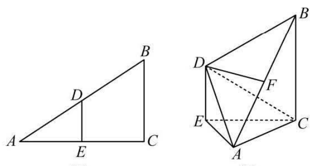


图1　　图2

A．当点 A 与点 C 重合时，三角形 ADE 翻折旋转所得的几何体的表面积为 $\sqrt{3}+\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\pi$

B．四棱锥 $A-BCED$ 的体积的最大值为 $\dfrac{3}{2}$

C．若三角形 ACE 为正三角形，则点 F 到平面 ACD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D．若异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 A、C 两点间的距离为$\sqrt{3}$

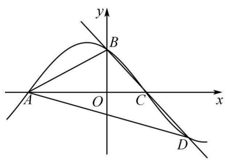
12．直线l_1、l_2为曲线$y=e^x$与$y=\ln x$的两条公切线.l_1从左往右依次交e^x与$\ln x$于 A 点、B 点；l_2从左往右依次交e^x与$\ln x$于 C 点、D 点，且 A 点位于 C 点左侧，D 点位于 B 点左侧.设坐标原点为 O，l_1与l_2交于点 P.则下列说法中正确的有（　）.

A．$AD<BC$　　B．$|\overrightarrow{OP}|<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\tan\angle BOC<\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}$　　D．$\angle AOC>\frac{\pi}{2}$

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13．已知数列$\{a_n\}$，令b_k为a_1，a_2，…，a_k中的最大值$(k=1,2,L\ ,n)$，则称数列$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的“控制数列”，$\{b_n\}$中不同数的个数称为“控制数列”$\{b_n\}$的“阶数”.例如：$\{a_n\}$为 1，3，5，4，2，则“控制数列”$\{b_n\}$为 1，3，5，5，5，其“阶数”为 3，若$\{a_n\}$由 1，2，3，4，5 任意顺序构成，则使“控制数列”$\{b_n\}$的“阶数”为 2 的所有$\{a_n\}$的个数为______.

14．如图，函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象与坐标轴交于点 A，B，C，直线 BC 交$f(x)$的图象于点 D，O(坐标原点)为$\triangle ABD$的重心(三条边中线的交点)，其中$A(-\pi,0)$，则$\tan B=$ __________.



15．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过右焦点$F_2$且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$直线 l 与该双曲线交于 M，N 两点（点 M 位于第一象限），$\triangle MF_1F_2$的内切圆半径为R_1，$\triangle NF_1F_2$的内切圆半径为R_2，则$\frac{R_1}{R_2}$为___________.

16．函数 f（x），g（x）的定义域都是 D，直线 $x=x_0$（$x_0\in D$），与 $y=f$（x），$y=g$（x）的图象分别交于 A，B 两点，若$|AB|$的值是不等于 0 的常数，则称曲线 $y=f$（x），$y=g$（x）为“平行曲线”，设 f（x）$=e^x-a\ln x+c$（$a>0$，$c\neq0$），且 $y=f$（x），$y=g$（x）为区间（0，+∞）的“平行曲线”，g（1）=e，g（x）在区间（2，3）上的零点唯一，则 a 的取值范围是_________.

四、解答题（17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分）

17．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_n=n^2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，数列$\{b_n\}$为等比数列，且$a_2+1$，$a_4+1$分别为数列$\{b_n\}$第二项和第三项.

(1)求数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若数列$c_n=a_nb_n+(-1)^n\cdot\frac{3\cdot2^n-2}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}$，求数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和T_{2n}；

(3)求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(b_i-1)^2}<3$.

18．在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，$c=2$.

(1)求$\angle A$；

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求 BC 边上高线的长.

条件①：$\sin C=\dfrac{2}{a}$；条件②：$b=1+\sqrt{3}$；条件③：$a=\sqrt{2}$.

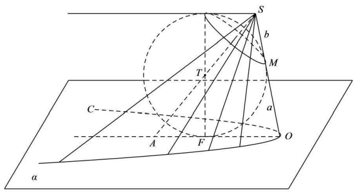
注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

19．三年多的“新冠之战”在全国人民的共同努力下刚刚取得完胜，这给我们的个人卫生和公共卫生都提出更高的要求。某机构欲组建一个有关“垃圾分类”相关事宜的项目组，对各个地区“垃圾分类”的处理模式进行相关报道，该机构从 600 名员工中进行筛选，筛选方法如下：每位员工测试 A，B，C 三项工作，3 项测试中至少 2 项测试“不合格”的员工，将被认定为“暂定”，有且只有一项测试“不合格”的员工将再测试 A，B 两项，如果这两项中有 1 项以上（含 1 项）测试“不合格”，将也被认定为“暂定”，每位员工测试 A，B，C 三项工作相互独立，每一项测试“不合格”的概率均为 $p\left(0<p<1\right)$.

(1)记每位员工被认定为“暂定”的概率为 $f\left(p\right)$，求 $f\left(p\right)$；

(2)每位员工不需要重新测试的费用为 90 元，需要重新测试的前后两轮测试的总费用为 150 元，所有员工除测试费用外，其他费用总计为 1 万元，若该机构的预算为 8 万元，且 600 名员工全部参与测试，试估计上述方案是否会超出预算，并说明理由.

20．已知顶点为 S 的圆锥面（以下简称圆锥 S）与不经过顶点 S 的平面 α 相交，记交线为 C，圆锥 S 的轴线 l 与平面 α 所成角 θ 是圆锥 S 顶角（圆 S 轴截面上两条母线所成角 θ 的一半，为探究曲线 C 的形状，我们构建球 T，使球 T 与圆锥 S 和平面 α 都相切，记球 T 与平面 α 的切点为 F，直线 l 与平面 α 交点为 A，直线 AF 与圆锥 S 交点为 O，圆锥 S 的母线 OS 与球 T 的切点为 M，$|OM|=a$，$|MS|=b$.



(1)求证：平面 $SOA\perp$ 平面 α，并指出 a，b，θ 关系式；

(2)求证：曲线 C 是抛物线.

21．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作一条渐近线的垂线交 C 于点 P，垂足为 Q，$|QF_2|=1$，$|PF_1|-|PF_2|=4$，M、N 为双曲线左右顶点.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)设过点 $G\left(4,0\right)$ 的动直线 l 交双曲线 C 右支于 A，B 两点（A 在第一象限），若直线 AM，BN 的斜率分别为 k_{AM}，k_{BN}.

（i）试探究 k_{AM} 与 k_{BN} 的比值 $\dfrac{k_{AM}}{k_{BN}}$ 是否为定值．若是定值，求出这个定值；若不是定值，请说明理由；

（ii）求 $k_{AM}^2+\dfrac{1}{3}k_{BN}$ 的取值范围.

22．已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}+(1-a)\ln x$，$g(x)=\ln x+ax$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)当 $a=2$ 时，对于在 $(0,1)$ 中的任意一个常数 b，是否存在正数 x_0，使得 $\mathrm{e}^{g(x_0+1)-3x_0-2}+\dfrac{b}{2}x_0^2<1$，请说明理由；

(3)设 $h(x)=f(x)-g(x)$，x_1 是 $h(x)$ 的极小值点，且 $h\left(x_1\right)\geq 0$，证明：$h\left(x_1\right)\geq 2\left(x_1^2-x_1^3\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。