

2023.03

高三数学

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 8 页。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面整洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x < 2\}$ ， $B = \{x | |x| < 3\}$ ，则 $A \cup B =$
A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(-5, 3)$
2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 4i$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$
A. -8 B. 0 C. 8 D. $8i$
3. 已知 $\sin \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha = 0$ ，则 $\cos 2\alpha =$
A. $-\frac{1}{3}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
4. 某运动员每次射击击中目标的概率均相等，若三次射击中，至少有一次击中目标的概率为 $\frac{63}{64}$ ，则射击一次，击中目标的概率为
A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

高三数学试题 第 1 页（共 8 页）

5. 已知抛物线 C 的焦点为 F ，准线为 l ，点 A 在 C 上，点 B 在 l 上，若 $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{BF}| = 4$ ，
 $\overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}) = 0$ ，则 F 到 l 的距离等于

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) + f(x) = 0$ ，且当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-\frac{9}{4}, f(-\frac{9}{4}))$ 处的切线方程为

A. $4x - 4y + 11 = 0$ B. $4x + 4y + 11 = 0$
C. $4x - 4y + 7 = 0$ D. $4x + 4y + 7 = 0$

7. 图1中，正方体 $ABCD - EFGH$ 的每条棱与正八面体 $MPQRSN$ （八个面均为正三角形）的一条棱垂直且互相平分，将该正方体的顶点与正八面体的顶点连结，得到图2的十二面体，该十二面体能独立密铺三维空间，若 $AB = 1$ ，则点 M 到直线 RG 的距离等于

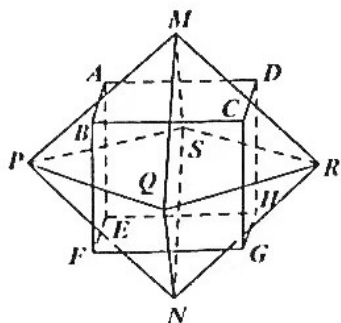


图 1

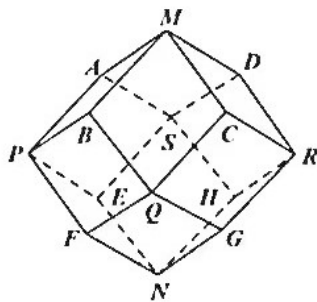


图 2

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

8. 已知平面向量 a, b, c 满足 $|a| = 1$ ， $b \cdot c = 0$ ， $a \cdot b = 1$ ， $a \cdot c = -1$ ，则 $|b + c|$ 的最小值为

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知 AB 为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的直径，直线 $l: y = kx + 1$ 与 y 轴交于点 M ，则

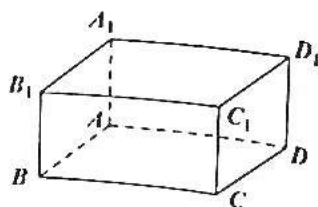
- A. l 与 C 恒有公共点
B. $\triangle ABM$ 是钝角三角形
C. $\triangle ABM$ 的面积的最大值为 1
D. l 被 C 截得的弦的长度的最小值为 $2\sqrt{3}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x$ ， $g(x) = \sin x + \cos x$ ，则

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 单调递增
B. $f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象平移得到
C. $f(x)$ 图象的对称轴均为 $g(x)$ 图象的对称轴
D. 函数 $y = f(x) + g(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

11. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = 2$ ， $AA_1 = 1$ ，点 P, Q 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，直线 AP 与该长方体的每一条棱所成的角都相等，且 $AP \perp CQ$ ，则

- A. $AP = \sqrt{2}$
B. 点 Q 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$
C. 三棱锥 $D - A_1QB$ 的体积为定值
D. AP 与该长方体的每个面所成的角都相等



12. 某商场设有电子盲盒机，每个盲盒外观完全相同，规定每个玩家只能用一个账号登陆，且每次只能随机选择一个开启。已知玩家第一次抽盲盒，抽中奖品的概率为 $\frac{2}{7}$ ，从第二次抽盲盒开始，若前一次没抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{2}$ ，若前一次抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{3}$ ，记玩家第 n 次抽盲盒，抽中奖品的概率为 P_n ，则

- A. $P_2 = \frac{19}{42}$
B. 数列 $\{P_n - \frac{3}{7}\}$ 为等比数列
C. $P_n \leq \frac{19}{42}$
D. 当 $n \geq 2$ 时， n 越大， P_n 越小

高三数学试题 第 3 页 (共 8 页)

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设随机变量 $X \sim N(72, \sigma^2)$ ，若 $P(70 < X < 73) = 0.3$ ，则 $P(71 < X < 74) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知 $(x+m)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ ，且 $a_3 + a_6 = 1$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1| - ax$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， C 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一象限的交点为 M ，线段 MF_2 与 C 交于点 N ， O 为坐标原点。若 $MF_1 \parallel ON$ ，则 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $(a+c)\sin A = \sin A + \sin C$ ，

$$c^2 + c = b^2 - 1.$$

(1) 求 B ；

(2) 已知 D 为 AC 的中点， $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (12 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_{n+1} = 2a_n - 2n + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的首项和公差;

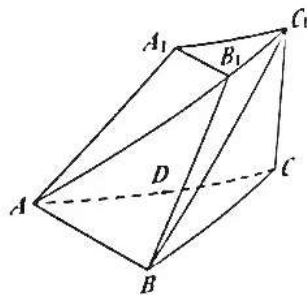
(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}, & n = 3k - 2, \\ (-1)^n \cdot a_n, & 3k - 1 \leq n \leq 3k, \end{cases}$ 其中 $k, n \in \mathbb{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{60} b_i$.

19. (12 分)

如图, 三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = 2B_1C_1 = 2$, D 是 AC 的中点, E 是棱 BC 上的动点.

(1) 试确定点 E 的位置, 使 $AB_1 \parallel$ 平面 DEC_1 ;

(2) 已知 $AB \perp BC_1$, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , 设直线 BC_1 与平面 DEC_1 所成的角为 θ , 试在 (1) 的条件下, 求 $\cos \theta$ 的最小值.



20. (12分)

港珠澳大桥海底隧道是当今世界上埋深最大、综合技术难度最高的沉管隧道，建设过程中突破了许多世界级难题，其建成标志着我国在隧道建设领域已达到世界领先水平。在开凿施工过程中，若隧道拱顶下沉速率过快，无法保证工程施工的安全性，则需及时调整支护参数。某施工队对正在施工的隧道工程进行下沉量监控量测工作，通过对监控量测结果进行回归分析，建立前 t 天隧道拱顶的累加总下沉量 z （单位：毫米）与时间 t （单位：天）的回归方程，通过回归方程预测是否需要调整支护参数。已知该隧道拱顶下沉的实测数据如下表所示：

t	1	2	3	4	5	6	7
z	0.01	0.04	0.14	0.52	1.38	2.31	4.3

研究人员制作相应散点图，通过观察，拟用函数 $z = ke^{at}$ 进行拟合。令 $u = \ln z$ ，计算得：

$$\bar{t} = 1.24, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(z_i - \bar{z}) = 22.37, \sum_{i=1}^7 (z_i - \bar{z})^2 = 27.5; \bar{u} = -1.2, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(u_i - \bar{u}) = 25.2,$$

$$\sum_{i=1}^7 (u_i - \bar{u})^2 = 30.$$

- (1) 请判断是否可以用线性回归模型拟合 u 与 t 的关系：（通常 $|r| > 0.75$ 时，认为可以用线性回归模型拟合变量间的关系）
- (2) 试建立 z 与 t 的回归方程，并预测前8天该隧道拱顶的累加总下沉量；
- (3) 已知当拱顶下沉速率超过9毫米/天，支护系统将超负荷，隧道有塌方风险。若规定从下午6点为调整支护参数的时间，试估计最迟在第几天需调整支护参数，才能避免塌方。

解：① 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ；

② 回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x};$$

③ 参考数据： $\sqrt{210} \approx 14.5$ ， $\ln 10 \approx 2.30$ 。

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B . 直线 l 与 C 相切, 且与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$

交于 M, N 两点, M 在 N 的左侧.

(1) 若 $|MN| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 求 l 的斜率;

(2) 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 k_2$ 为定值.

22. (12 分)

已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a(x-1) - x \ln x$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

(1) 求 a 的范围;

(2) 当 $0 < a \leq 1 - \ln 2$ 时, 证明: $a + \frac{1}{2} < f(x_1) + f(x_2) < 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线