华大新高考联盟 2022 届高三 3 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题考查复数的四则运算、复数的几何意义，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\frac{z}{4-5i}=\frac{-1+2i}{4-5i}=\frac{(-1+2i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=-\frac{14}{41}+\frac{3}{41}i$，故选 A.

2.【答案】D

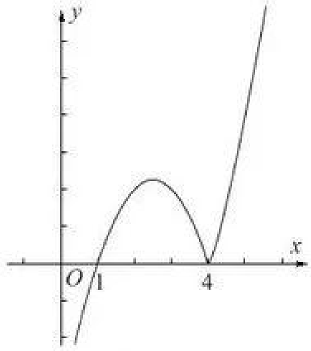
【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$A=\{x|(x-3)(x-5)<0\}=\{x|3<x<5\}$；而 $A\cup B=\{x|3<x<7\}$，结合数轴可知，$3\leqslant m<5$，故选 D.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查函数的单调性、分段函数，考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=|4-x|\cdot(x-1)=\begin{cases}(4-x)(x-1), x<4,\\(x-4)(x-1), x\geqslant 4\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示；观察可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{5}{2},4\right)$ 上单调递减，故选 D.



第 3 题图

4.【答案】C

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系，考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】A 中，若 $l/\!/m$，则 $n\perp\alpha$ 未必成立；B 中，可能有 $m\subset\beta$；因为 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 $m\perp\beta$，而 $n/\!/\beta$，故 $m\perp n$，故 C 正确；D 中，$m\perp n$；故选 C.

5.【答案】C

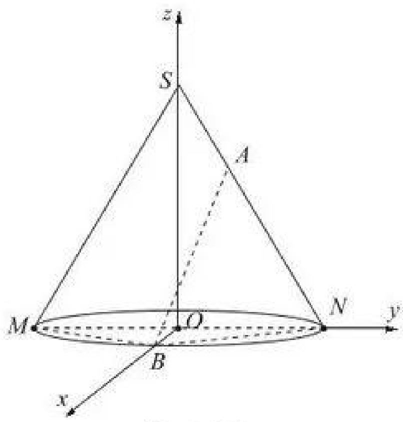
【命题意图】本题考查平面向量的数量积及其应用，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$；而 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=8$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，故 $\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\rangle=45^\circ$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45^\circ=8$，解得 $|\boldsymbol{a}|=4\sqrt{2}$，故选 C.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征、空间角，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】如图所示，以 O 为坐标原点，OB、ON、OS 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示空间直角坐标系；不妨设 $MN=6$，则 $S(0,0,3\sqrt{3})$，$M(0,-3,0)$，$B(3,0,0)$，$A(0,1,2\sqrt{3})$，故 $\overrightarrow{SM}=(0,-3,-3\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(3,-1,-2\sqrt{3})$，故直线 SM，AB 之间夹角的余弦值 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{SM}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{7\sqrt{22}}{44}$，故选 B.



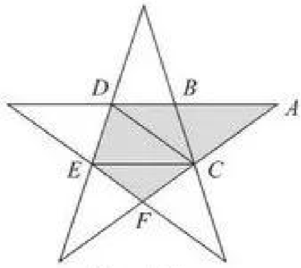
第 6 题图

7.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、几何概型，考查直观想象、数学建模、数

学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\sin 18^\circ=\dfrac{\frac{BC}{2}}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，故$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；设$\triangle ABC$的面积为$x$，则$\triangle BCD$和$\triangle CEF$的面积均为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x$，$\triangle CDE$的面积为$x$，则往五角星内投掷一点，该点落在阴影区域内的概率$P=\dfrac{2x+2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}{2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+6x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选B.



第7题图

8.【答案】D

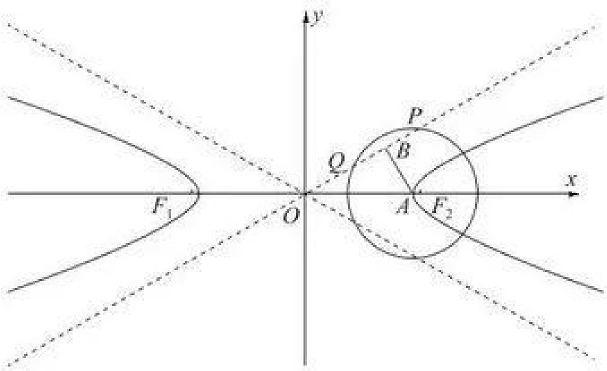
【命题意图】本题考查数学文化、等比数列的通项公式与前n项和公式，考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$a_1=1$，$a_{13}=2$，故$q^{12}=2$，故$a_9=a_1q^8=2^{\frac{8}{12}}=\sqrt[3]{4}$，故A正确；因为$\dfrac{a_6}{a_2}=q^4=\sqrt[3]{2}$，故B正确；$M=\dfrac{a_2(1-q^{11})}{1-q}=\dfrac{\sqrt[12]{2}(1-\sqrt[12]{2^{11}})}{1-\sqrt[12]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{12}}-1-1}{1-2^{\frac{1}{12}}}=-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}$，要证$M>3$，即证$-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>3$，即证$\dfrac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>4$，即证$\dfrac{5}{4}>2^{\frac{1}{12}}$，即证$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{12}>2$，而$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{12}>(1.5)^6>2$，故C正确；而$N=M+3$，要证$N>7$，即证$M>4$，即证$-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>4$，即证$\dfrac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>5$，即证$\dfrac{6}{5}>2^{\frac{1}{12}}$，即证$\left(\dfrac{6}{5}\right)^{12}>2$，而$\left(\dfrac{6}{5}\right)^{12}>(1.4)^6>(1.9)^3>2$，故$N>7$，D错误，故选D.

9.【答案】C

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为$\overrightarrow{F_1P}+\overrightarrow{F_1O}=2\overrightarrow{F_1Q}$，故$Q$是线段$OP$的中点；取$PQ$中点$B$，连接$AB$，可知$|OB|=3|PB|$，求得$A(a,0)$到渐近线的距离$|AB|=\dfrac{ab}{c}$，所以$a^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}=9\left(b^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}\right)$，将$c^2-a^2$替换$b^2$，并化简，得$9c^4-18a^2c^2+8a^4=0$，即$9e^4-18e^2+8=0$，根据$e>1$，解得$e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选C.



第9题图

10.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f(2\pi-x)=\sin[\cos(2\pi-x)]+\cos(2\pi-x)=\sin(\cos x)+\cos x=f(x)$，故①正确；易知$f(x+2\pi)=f(x)$，故$2\pi$为函数$f(x)$的一个周期；当$x\in[0,\pi]$时，$\cos x\in[-1,1]$，故$y=\sin(\cos x)$，$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，即$f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，由对称性

可知，函数 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上单调递增，故②正确；结合②中单调性以及函数的奇偶性可知，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=\sin 1+1<1+\sin\frac{5\pi}{12}=1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，故③错误；故选 C.

11.【答案】C

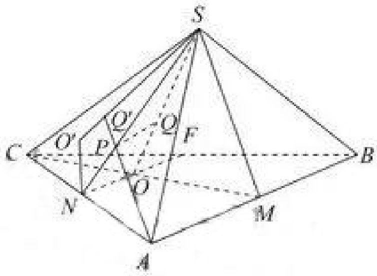
【命题意图】本题考查函数的图象与性质、导数的几何意义，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，则 $\begin{cases}0<m<1,\\4m+1\geqslant 2,\end{cases}$ 故 $\frac{1}{4}\leqslant m<1$；因为 $y=e^x+4m$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-(4m+1)=x$，即 $y=x+4m+1$，故 $y=x+2$ 与 $y=e^x+4m$ 最多有一个公共点 $(0,2)$，故 $y=x+2$ 与 $y=2-\log_m(x+1)$ 有且仅有 1 个公共点，故 $y=2-\log_m(x+1)$ 在 $x=0$ 处的切线的斜率 k 大于等于 1，而 $y'=-\frac{1}{(x+1)\ln m}$，$k=-\frac{1}{\ln m}\geqslant 1$，故 $\frac{1+\ln m}{\ln m}\leqslant 0$，则 $\frac{1}{e}\leqslant m<1$，故选 C.

12.【答案】B

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$4\pi R^2=3\pi$，解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设点 S 到平面 ABC 的距离为 h，故 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-h\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $SA=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=1$ 或 $SA=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{2}$（舍去），故 $SA=1$；取 CB 中点 F，连接 NF 交 CM 于点 O，易证得 $NO\perp$ 平面 SCM，要求 $AP+PQ$ 最小，首先需 PQ 最小，此时可得 $PQ\perp$ 平面 SCM，又可证明 $PQ/\!/FN$；再把平面 SON 绕 SN 旋转，与平面 SNA 共面，又可证得 $\angle SON=90°$.



第 12 题图

$\because SN=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$NO=\frac{1}{2}NF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \sin\angle OSN=\frac{ON}{SN}=\frac{1}{2}$，即 $\angle OSN=30°$，$\therefore \angle ASQ'=45°+30°=75°$，

可得 $\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$(AP+PQ)_{\min}=AQ'=SA\cdot\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

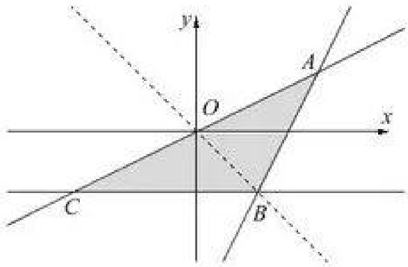
故选 B.

二、填空题

13.【答案】6.

【命题意图】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=x+y$ 过点 A 时，$z=x+y$ 有最大值；联立 $\begin{cases}2x-y=6,\\x-2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$ 故 $z=x+y$ 的最大值 6.



第 13 题图

14.【答案】-448.

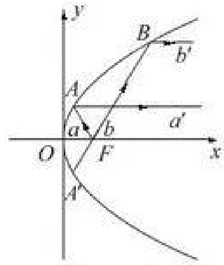
【命题意图】本题考查二项式定理，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(2x^{\frac{1}{2}})^{8-r}\cdot(-x^{-\frac{3}{5}})^r=C_8^r\cdot 2^{8-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{4-\frac{11}{10}r}$；令 $4-\frac{11}{10}r=-\frac{3}{2}$，解得 $r=5$，故所求系数为 $C_8^5\cdot 2^3\cdot(-1)^5=-448$.

15.【答案】4.

【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】如图所示，延长 BF 交抛物线 C 于点 A'，则 $|FA|+|FB|=|A'B|=\frac{32}{3}=\frac{2p}{\sin^2 60°}$，解得 $p=4$.



第 15 题图

16.【答案】0.

【命题意图】本题考查数列的前 n 项和与通项公式的关系、裂项相消法、数列的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$na_{n+1}=2S_n$，当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2$，$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=0$；由 $na_{n+1}=2S_n$，可知当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-1)a_n=2S_{n-1}$，相减整理得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=0$，所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，0 为公差的等差数列，所以 $\frac{a_n}{n}=1$，$a_n=n$，

所以 $\frac{a_{n+2}}{2^{n+1}a_na_{n+1}}=\frac{n+2}{2^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{2^n\cdot n}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$，

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2^1\cdot 1}+\frac{1}{2^2\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{2^n\cdot n}\right)-\left(\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$，

$T_n+(-1)^{n+1}\cdot\lambda>0$ 等价于 $(-1)^{n+1}\cdot\lambda>\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}$；当 n 是正奇数时，$\lambda>\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}$；因为 $\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2^2\cdot 2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$，所以 $\lambda>-\frac{3}{8}$；当 n 是正偶数时，$\lambda<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$；因为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}=\frac{11}{24}$，所以 $\lambda<\frac{11}{24}$；综上所述，λ 的取值范围为 $-\frac{3}{8}<\lambda<\frac{11}{24}$，则整数 λ 的值为 0.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查独立性检验、超几何分布、离散型随机变量的分布列以及数学期望，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)完善表格如右所示： ……(2 分)

	热爱电子竞技	对电子竞技无感	总计
男性	200	50	250
女性	100	150	250
总计	300	200	500

则 K^2 的观测值 $k=\frac{500\times(200\times150-100\times50)^2}{250\times250\times300\times200}=\frac{250}{3}\approx83.333>10.828$. ……(5 分)

有 99.9%的把握认为 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度有关. ……(6 分)

(2)依题意，这 15 人中男生有 10 人，女生有 5 人，则 X 的可能取值为 0,1,2,3，故

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{5\times4\times3}{15\times14\times13}=\frac{2}{91}$，$P(X=1)=\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{5\times2\times10}{5\times7\times13}=\frac{20}{91}$，

$P(X=2)=\frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{5\times5\times9}{5\times7\times13}=\frac{45}{91}$，$P(X=3)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{10\times9\times8}{15\times14\times13}=\frac{24}{91}$， ……(8 分)

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{24}{91}$

……(10 分)

则 $E(X)=1\times\frac{20}{91}+2\times\frac{45}{91}+3\times\frac{24}{91}=2$. ………………………………………………… (12 分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求二面角，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为 $OE//$平面 SAB，$OE\subset$平面 SBD，平面 $SAB\cap$平面 $SBD=SB$，

故 $OE//SB$. ……………………………………………………………………………… (3 分)

因为四边形 $ABCD$ 为矩形，故 $BO=DO$，则 $SE=DE$. ……………………………………… (4 分)

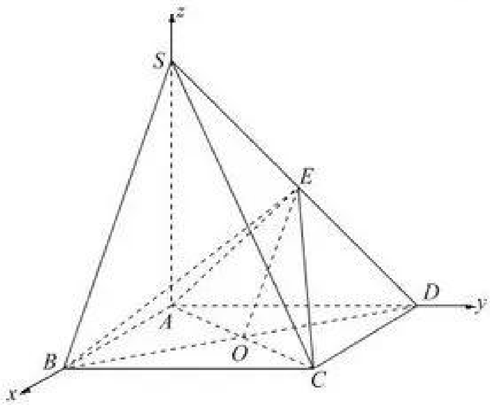
(2)∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴$AB\perp AD$.

∵平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，∴$AB\perp$平面 SAD.

∵$SA\subset$平面 SAD，∴$AB\perp SA$. 同理 $AD\perp SA$.

又 $AB\cap AD=A$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，∴$SA\perp$平面 $ABCD$. ……………… (6 分)

设 $AB=a$，以 A 为坐标原点，AB,AD,AS 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(a,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,1,1)$，$S(0,0,2)$. ……………………………………………………… (7 分)



第 18 题图

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 ABE 的法向量，

∵$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=0,\\ y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=-1$，.

∴平面 ABE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$. ……… (8 分)

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 CBE 的法向量，

∵$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}-2y=0,\\ -ax-y+z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $z=a$.

∴平面 CBE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,a)$. ………… (10 分)

∴$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-a}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+1}}=-\frac{3\sqrt{20}}{20}$，解得 $a=3=AB$. ……………………………… (12 分)

19.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\sin C=\sin 2A=2\sin A\cos A$，即 $c=2a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，……………………… (1 分)

而 $\sin C=\sqrt{2}\sin B$，故 $c=\sqrt{2}b$，故 $a^3-2\sqrt{2}=6a-6\sqrt{2}$. ……………………………………… (2 分)

即 $(a-\sqrt{2})(a^2+\sqrt{2}a+2)=6(a-\sqrt{2})$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2(a+2\sqrt{2})=0$，

因为 $a>0$，故 $a=\sqrt{2}=b$. ………………………………………………………………… (4 分)

而 $a^2+b^2=c^2$，故△ABC 是等腰直角三角形. ………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)可知，$C=\frac{\pi}{2}$，设$\angle PAC=\alpha$，其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

而 $PA=AC$，则$\angle PCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，$\angle PCB=\frac{\alpha}{2}$. ………………………………………………… (6 分)

取 BC 的中点 D，则 $PD\perp BC$，故 $PC=\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. ……………………………………………… (7 分)

又 $AP=AC=\sqrt{2}$，在△APC 中，由正弦定理，$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. ………………………… (9 分)

化简可得，$\sin\alpha=\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………… (10 分)

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，……………………………………………………………… (11 分)

故 $\cos\angle PAB=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ……………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆综合性问题，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ ……………………………… (2 分)

解得 $a^2=4,b^2=3$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………… (4 分)

(2)当 $M(-2,0),N\left(1,\frac{3}{2}\right),G(1,t)$ 时，直线 MG 的方程为 $y=\frac{t}{3}(x+2)$，交 y 轴于点 $\left(0,\frac{2}{3}t\right)$；

当 $M\left(1,\frac{3}{2}\right),N(-2,0),G(-2,t)$ 时，直线 MG 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\frac{t-\frac{3}{2}}{-3}(x-1)$，交 y 轴于点 $\left(0,\frac{t+3}{3}\right)$.

若直线 MG 经过 y 轴上定点，则 $\frac{2}{3}t=\frac{t+3}{3}$，即 $t=3$，直线 MG 交 y 轴于点 $(0,2)$. ……………… (6 分)

下面证明存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 整理，得 $(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$，

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-8k}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{-8}{4k^2+3}$. ……………………………… (8 分)

设点 $G(x_2,3)$，所以直线 MG 的方程：$y-3=\frac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$. ……………………………… (9 分)

令 $x=0$，得 $y=\frac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\frac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $kx_1x_2=x_1+x_2$，所以 $y=\frac{3x_1-x_2-(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2$. ……………………… (11 分)

所以直线 MG 过定点 $(0,2)$.

综上所述，存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点 $(0,2)$. ……………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=2e^x+x\sin x-2\cos x$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $e^x\geqslant 1$，$x\sin x\geqslant 0$，因此 $f'(x)\geqslant 2-2\cos x\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，于是 $f(x)\geqslant f(0)=2$，

故函数 $f(x)$ 的最小值为 2. ……………………………… (4 分)

(2)令 $g(x)=e^x-1-mx\sin x-x,g'(x)=e^x-m(\sin x+x\cos x)-1$，

当 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$g(x)\geqslant e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1$，

由(1)可知，当 $x\in(0,\pi]$ 时，$e^x-\frac{1}{2}x\sin x-x-1>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\pi]$ 时，$g(x)>0$. 而 $g(0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$g(x)$ 仅有 1 个零点，舍去. ………… (5 分)

当 $m>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)=e^x-m(x\cos x+\sin x)-1,g''(x)=e^x+m(x\sin x-2\cos x)$. ……………… (6 分)

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 单调递增. ……………………………… (7 分)

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$g'''(x)=e^x+m(3\sin x+x\cos x)$.

因为 $e^x>0,m(3\sin x+x\cos x)\geqslant 0$，所以 $g'''(x)>0$，所以 $g''(x)$ 单调递增. ……………………… (8 分)

又 $g''(0)=1-2m<0, g''(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}m>0$,

因此 $g''(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ……………………………… (9 分)

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g''(x)<0$，所以 $g'(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 单调递增.

又 $g'(0)=0, g'(x_0)<g'(0)=0, g'(\pi)=e^{\pi}+m\pi-1>0$,

因此 $g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上存在唯一的零点 x_1，且 $x_1\in(x_0,\pi)$. ……………………………… (10 分)

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增.

又 $g(0)=0, g(x_1)<g(0)=0, g(\pi)=e^{\pi}-\pi-1>0$,

所以 $g(x)$ 在 (x_1,π) 上存在唯一零点，因此 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点. ……………………………… (11 分)

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. ……………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查参数方程、极坐标方程的转化，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，直线 l 的普通方程为 $y=x\tan\alpha-2, \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ……………………………… (1 分)

而曲线 $C: x^2+(y-1)^2=1$，即 $x^2+y^2-2y=0$，故 $\rho^2=2\rho\sin\theta$. ……………………………… (3 分)

而 $\varphi\in(0,\pi)$，$\cos\varphi\in(-1,1)$，则 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta, \theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$. ……………………………… (5 分)

(2)由题意可知，$A(0,1)$，$M\left(\frac{2}{\tan\alpha},0\right)$，$N(0,-2)$，$P(\cos 2\alpha, 1+\sin 2\alpha)$,

点 P 到直线 MN 的距离为 $d=\frac{|\tan\alpha\cdot\cos 2\alpha-(1+\sin 2\alpha)-2|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$=|\sin\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha\sin 2\alpha-3\cos\alpha|=\sin\alpha-3\cos\alpha$. ……………… (7 分)

$|MN|=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{2}{\tan\alpha}\right)^2}=\frac{2}{\sin\alpha}$, ……………………………… (8 分)

故 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot d=1+\frac{3}{\tan\alpha}=4$，解得 $\tan\alpha=1$.

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. ……………………………… (10 分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的性质、基本不等式、柯西不等式，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|3x+6|+|x-4|\geqslant 10$,

当 $x<-2$ 时，$-3x-6-x+4\geqslant 10$，得 $x\leqslant -3$，故 $x\leqslant -3$； ……………………………… (2 分)

当 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3x+6-x+4\geqslant 10$，得 $x\geqslant 0$，故 $0\leqslant x\leqslant 4$； ……………………………… (3 分)

当 $x>4$ 时，$3x+6+x-4\geqslant 10$，得 $x\geqslant 2$，解得 $x>4$. ……………………………… (4 分)

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 0\}$. ……………………………… (5 分)

(2)由(1)可知，$\lambda=6$. ……………………………… (6 分)

故 $6m+3n+2p=6$，则 $m+\frac{n}{2}+\frac{p}{3}=1$. ……………………………… (7 分)

而 $mn=2m\cdot\frac{n}{2}\leqslant 2\left[\frac{m+\frac{n}{2}}{2}\right]^2<2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，故 $16^{mn}<16^{\frac{1}{2}}=4$. ……………………………… (9 分)

当且仅当 $m=\frac{n}{2}$ 时等号成立，故不存在 $m,n\in(0,+\infty)$，使得 $16^{mn}=4$. ……………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。