合肥八中 2023 届最后一卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	A	C	B	B	C	A	BCD	ACD	AB	BCD

一、单选题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.【答案】D

【解析】因为 $A=\left\{x\left|\frac{x}{x+1}<1,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$,所以 $A=\{x|x>-1,x\in\mathbf{R}\}$,因为 $B=\left\{x\in\mathbf{N}\left|\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 4\right.\right\}$,所以 $B=\{0,1,2\}$,因此 $A\cap B=\{0,1,2\}$,故选 D.

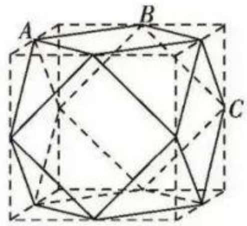
2.【答案】C

【解析】复数 $z_1=2+\mathrm{i}$,$z_2=1-a\mathrm{i}$,则 $z_1\cdot\overline{z_2}=(2+\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})=(2-a)+(2a+1)\mathrm{i}$,

依题意得,$\begin{cases}a-2=0\\2a+1\neq 0\end{cases}$,解得 $a=2$,即 $z_2=1-2\mathrm{i}$,所以 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|=1$. 故选 C.

3.【答案】A

【解析】如图,该半正多面体的表面由 6 个正方形和 8 个正三角形构成,则其表面积 $S=6\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2=4\sqrt{3}+12$,该半正多面体的体积可以由正方体截去 8 个三棱锥的体积计算,$V=8-8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{20}{3}$,$\therefore\frac{S}{V}=\frac{3\sqrt{3}+9}{5}$.



故选 A.

4.【答案】C

【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 的定义域关于原点对称.

若 $m=0$,则 $f(x)$ 的定义域 $\left\{x\left|x\neq\frac{1}{2}\right.\right\}$ 不关于原点对称,

所以 $m\neq 0$,$f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq\frac{1}{2}\text{且}x\neq\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right.\right\}$,从而 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}=-\frac{1}{2}$,解得 $m=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-1}\right|+n$,定义域为 $\left\{x\left|x\neq\pm\frac{1}{2}\right.\right\}$. 令 $f(0)=0$,

得 $\ln\frac{1}{2}+n=0$,$n=\ln 2$. 经检验,$f(x)=\ln\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-1}\right|+\ln 2$ 为奇函数,$f(1)=\ln 3$.

故选 C.

5.【答案】B

【解析】设男生甲比男生乙先出场为事件 A,则 $n(A)=\frac{1}{2}\mathrm{A}_6^6=360$,

设两位男生相邻为事件 B,则男生甲比男生乙先出场且两位男生相邻为事件 AB,$n(AB)=\mathrm{A}_5^5=120$,故在已知男生甲比男生乙先出场的条件下,则两位男生相邻的概率是 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

6.【答案】B

【解析】设 A' 所在平面为 α，圆的另一半所在平面为 β，

若 $P\in\alpha$，则 P,A',O 三点共线时，$|PA'|$ 有最小值 $|PA'|=|OA'|-R=4-1=3$；

当 P 在圆与 x 轴交点时，取到最大值 $|PA'|=\sqrt{(1-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{17}$，即 $|PA'|\in[3,\sqrt{17}]$；

若 $P\in\beta$，A' 在 β 上的投影为 A_1，则 A' 到 β 面距离为 $|A'A_1|=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，

则 P,A_1,O 三点共线时，$|PA_1|$ 有最大值，$|PA_1|=|OA_1|+R=2+1=3$，

此时 $|PA'|_{\max}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21}$；当 P 在圆与 x 轴交点时，$|PA_1|$ 有最小值，

$|PA_1|=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$，此时 $|PA'|_{\min}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{17}$；

即 $|PA'|\in[\sqrt{17},\sqrt{21}]$；综上可得，$|PA'|\in[3,\sqrt{21}]$.

故选 B.

7.【答案】C

【解析】构造函数 $f(x)=x-\ln x(x>0)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由 $2e^{a-2}=a$，可得 $a-2=\ln a-\ln 2$，即 $a-\ln a=2-\ln 2$，即 $f(a)=f(2)$，

由 $3e^{b-3}=b$，可得 $b-3=\ln b-\ln 3$，即 $b-\ln b=3-\ln 3$，即 $f(b)=f(3)$，

因为 $3>2$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(3)>f(2)$，故 $f(b)>f(a)$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$a,b\in(0,1)$，故 $b<a$，

因为 $2e^{c-3}=c$，$c-3=\ln\frac{c}{2}=\ln c-\ln 2>\ln c-\ln 3$，

故 $c-\ln c>3-\ln 3$，即 $f(c)>f(3)$，因为 $f(b)=f(3)$，所以 $f(c)>f(b)$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$b,c\in(0,1)$，故 $c<b$，从而 $c<b<a$.

故选 C.

8.【答案】A

【解析】因为 $\triangle ABC$ 是面积为 $3\sqrt{3}$ 的等边三角形，记 $\triangle ABC$ 边长为 a，所以 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times a^2=3\sqrt{3}$，

解得 $a=2\sqrt{3}$，记 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r，根据 $S=\frac{1}{2}Cr$，

可得：$3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times r$，解得 $r=1$，因为正方形 $MNPQ$ 的面积为 2，所以正方形边长为 $\sqrt{2}$，

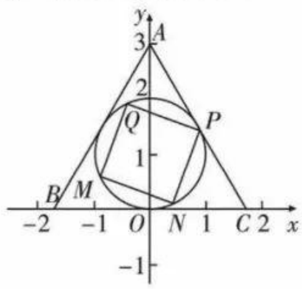
记正方形 $MNPQ$ 外接圆半径为 R，所以其外接圆直径等于正方形的对角线 2，即 $R=1$，

根据正方形的对称性和等边三角形的对称性可知．正方形外接圆即为等边三角形的内切圆，

因为正方形 $MNPQ$ 可在 $\triangle ABC$ 内任意旋转，

可知正方形 $MNPQ$ 各个顶点均在该 $\triangle ABC$ 的内切圆上，

以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为 x 轴，以 BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系如图所示：



故可知 $B(-\sqrt{3},0)$，$C(\sqrt{3},0)$，$A(0,3)$，

圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，

故设 $P(\cos\alpha,1+\sin\alpha)$，$Q\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),1+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$，$\alpha\in(0,2\pi)$，

即 $P(\cos\alpha,1+\sin\alpha)$，$Q(-\sin\alpha,1+\cos\alpha)$，

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3}-\sin\alpha,1+\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha-\sqrt{3},1+\sin\alpha)=(1+\sqrt{3})(\cos\alpha+\sin\alpha)-2=0$，

$\therefore\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$，

$|\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CP}|^2=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+(2+\cos\alpha+\sin\alpha)^2=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+(\sqrt{3}+1)^2$

$=2-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\sqrt{3}+1)^2=2+4\sqrt{3}$.

故选 A.

9.【答案】BCD

【解析】对于选项 A，8 个数据从小到大排列，由于 $8\times0.25=2$，

所以第 25 百分位数应该是第二个与第三个的平均数 $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，故 A 错误；

对于选项 B，由 $P(N|M)+P(\overline{N})=1$，可得 $P(N|M)=1-P(\overline{N})$，即 $\frac{P(MN)}{P(M)}=P(N)$，

即 $P(MN)=P(M)P(N)$，所以 M、N 相互独立，故 B 正确；

对选项 C，$X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，则 $D(2X+1)=4D(X)=4\times n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5\Rightarrow n=5$，故 C 正确；

对选项 D：因为随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，

由正态曲线的对称性可得：$P(X>4)=P(X<2)=1-0.62=0.38$，

所以 $P(2<X<4)=1-2\times0.38=0.24$，所以 $P(3<X<4)=0.12$. 故 D 正确；

故选 BCD.

10.【答案】ACD

【解析】$\because f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，

又 $\because f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$，$\therefore$ 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最值，即 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，

又 $\because f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，$\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore$ 点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 和直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的图象相邻的对称中心和对称轴，

$\therefore$ 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$，

$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$，又 $\because f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，

$\therefore$ 由正弦函数的性质，$2\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore k=1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

对于选项 A，函数 $f(x)$ 是偶函数，故 A 正确；

对于选项 B，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 B 错误；

对于选项 C，由图象可知，函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，故 C 正确；

对于选项 D，由 $f(2x)>f(x)$，得 $\cos 4x>\cos 2x$，$\therefore 2\cos^2 2x-1>\cos 2x$，

$\therefore 2\cos^2 2x-\cos 2x-1>0$，$\therefore (2\cos 2x+1)(\cos 2x-1)>0$，$\because -1\leqslant \cos 2x\leqslant 1$，

$\therefore \cos 2x-1\leqslant 0$，$\therefore 2\cos 2x+1<0$，$\therefore \cos 2x<-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 解得 $-1\leqslant \cos 2x<-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 由余弦函数的性质，$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore \frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$ 若 $f(2x)>f(x)$ 在 (m,n) 上恒成立，则 $n-m$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，故 D 正确.

故选 ACD.

11.【答案】AB

【解析】对于选项 A，先求双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程，不妨先探究双曲线在第一象限的部分(其他象限由对称性同理可得).

由 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：$y=\sqrt{b^2x^2-b^2}$，所以 $y'=\frac{b^2x}{\sqrt{b^2x^2-b^2}}$，

则在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线斜率为 $k=\frac{b^2x_0}{\sqrt{b^2x_0^2-b^2}}=\frac{b^2x_0}{y_0}$，

所以在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$y-y_0=\frac{b^2x_0}{y_0}(x-x_0)$，又因为 $x_0^2-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

所以在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$x_0x-\frac{y_0y}{b^2}=1$，

不失一般性，设点 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线在第一象限的一点，$A(x_1,y_1)$ 是切线与渐近线在第一象限的交点，$B(x_2,y_2)$ 是切线与渐近线在第四象限的交点，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm bx$，

联立 $\begin{cases} x_0x-\frac{y_0y}{b^2}=1 \\ y=bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{bx_0-y_0} \\ y=\frac{b^2}{bx_0-y_0} \end{cases}$，

所以点 $A\left(\frac{b}{bx_0-y_0},\frac{b^2}{bx_0-y_0}\right)$，同理可得：$B\left(\frac{b}{bx_0+y_0},\frac{-b^2}{bx_0+y_0}\right)$，

则 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{b}{bx_0-y_0}-\frac{b}{bx_0+y_0}\right)^2+\left(\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{b^2}{bx_0+y_0}\right)^2}=2\sqrt{(b^2+1)x_0^2-1}$，又因为 $x_0\geqslant 1$，

所以 $|AB|\geqslant 2\sqrt{(b^2+1)-1}=2b$，即：$|AB|_{\min}=2b$，故 A 项正确；

对于选项 B，由 A 项知，$\dfrac{\frac{b}{bx_0-y_0}+\frac{b}{bx_0+y_0}}{2}=x_0$，$\dfrac{\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{-b^2}{bx_0+y_0}}{2}=y_0$，所以点 $P(x_0,y_0)$ 是线段 AB 的中点，所以 $S_{\triangle AOP}=S_{\triangle BOP}$，$S_{\triangle AOB}=2S_{\triangle AOP}$，故 B 项正确；

对于选项 C，因为在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为：$y-y_0=\frac{b^2x_0}{y_0}(x-x_0)$，

令 $y=0$ 得 $x=\frac{1}{x_0}$，所以点 $D\left(\frac{1}{x_0},0\right)$，

则 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times|OD|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x_0}\times\left(\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{b^2}{bx_0+y_0}\right)=b$，

当点 $P(x_0,y_0)$ 在顶点 $(1,0)$ 时，仍然满足 $S_{\triangle AOB}=b$，故 C 项错误；

对于选项 D,因为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$D\left(\frac{1}{x_0},0\right)$,所以$\overrightarrow{F_1D}=\left(\frac{1}{x_0}+c,0\right)$,$\overrightarrow{DF_2}=\left(c-\frac{1}{x_0},0\right)$,

又因为$\overrightarrow{F_1D}=2\overrightarrow{DF_2}$,所以$\frac{1}{x_0}+c=2\left(c-\frac{1}{x_0}\right)$,解得:$c=\frac{3}{x_0}$,

即:$x_0=\frac{3}{c}$,代入 $x_0^2-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ 得 $y_0^2=\frac{9b^2}{c^2}-b^2$,

所以$|PF_1|^2=(x_0+c)^2+y_0^2=\left(\frac{3}{c}+c\right)^2+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2+6+\frac{9b^2}{c^2}-b^2$

$$=\frac{9}{c^2}+c^2+6+\frac{9(c^2-1)}{c^2}-(c^2-1)=16,$$

$|PF_2|^2=(x_0-c)^2+y_0^2=\left(\frac{3}{c}-c\right)^2+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2-6+\frac{9b^2}{c^2}-b^2$

$$=\frac{9}{c^2}+c^2-6+\frac{9(c^2-1)}{c^2}-(c^2-1)=4,$$

$S_{\triangle PF_1F_2}=\sqrt{15}$,所以 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\times|PF_1|\times|PF_2|}=\frac{16+4-4c^2}{2\times4\times2}=\frac{5-c^2}{4}=\pm\frac{1}{4}$,

解得:$c^2=4$ 或 6,所以离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$ 或$\sqrt{6}$,故 D 项错误. 故选 AB.

12.【答案】BCD

【解析】对于选项 A,$\overrightarrow{PS}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})=\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR}=|\overrightarrow{PS}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|\cos 60^\circ+|\overrightarrow{PS}|\cdot|\overrightarrow{PR}|\cos 60^\circ>0$,故 A 错误;

对于选项 B,当直线 MN 平行于直线 AB,S 为线段 PC 上靠近 C 的三等分点,即 $SC=\frac{1}{3}PC$,此时 $PC\perp$平面 SRQ,以下给出证明:

在正四面体 $P-ABC$ 中,设各棱长为 a,

$\therefore\triangle ABC,\triangle PBC,\triangle PAC,\triangle PAB$ 均为正三角形,$\because$点 O 为$\triangle ABC$ 的中心,$MN/\!/AB$,

$\therefore$由正三角形中的性质,易得 $CN=CM=\frac{2}{3}a$,

在$\triangle CNS$ 中,$\because CN=\frac{2}{3}a$,$SC=\frac{1}{3}a$,$\angle SCN=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore$由余弦定理得,$SN=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

$\therefore SC^2+SN^2=\frac{4}{9}a^2=CN^2$,则 $SN\perp PC$,

同理,$SM\perp PC$,又 $SM\cap SN=S$,$SM\subset$平面 SRQ,$SN\subset$平面 SRQ,

$\therefore PC\perp$平面 SRQ,$\therefore$存在点 S 与直线 MN,使 $PC\perp$平面 SRQ,故 B 正确;

对于选项 C,$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CN}=\mu\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{CM}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{CN}$,$\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$,

$\lambda+3\mu=(\lambda+3\mu)\left(\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}\right)=\frac{4}{3}+\frac{\lambda}{3\mu}+\frac{\mu}{\lambda}\geqslant\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $\lambda=\sqrt{3}\mu$ 时等号成立,故 C 正确;

对于选项 D,设 D 为 BC 的中点,

则$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$，

又$\because P,A,Q$三点共线，$\therefore\overrightarrow{PA}=\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ}$，$\because P,B,R$三点共线，

$\therefore\overrightarrow{PB}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PR}|}\overrightarrow{PR}$，$\because P,S,C$三点共线，$\therefore\overrightarrow{PC}=\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PS}|}\overrightarrow{PS}$，

设$|\overrightarrow{PQ}|=x,|\overrightarrow{PR}|=y,|\overrightarrow{PS}|=z$，则$\overrightarrow{PO}=\frac{|\overrightarrow{PA}|}{3x}\overrightarrow{PQ}+\frac{|\overrightarrow{PB}|}{3y}\overrightarrow{PR}+\frac{|\overrightarrow{PC}|}{3z}\overrightarrow{PS}$，

$\because O,Q,R,S$四点共面，$\therefore\frac{|\overrightarrow{PA}|}{3x}+\frac{|\overrightarrow{PB}|}{3y}+\frac{|\overrightarrow{PC}|}{3z}=1$，又$\because|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，

$\therefore\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}=\frac{1}{|\overrightarrow{PA}|}$，$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{|\overrightarrow{PA}|}$，即$\frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{PR}|}+\frac{1}{|\overrightarrow{PS}|}=\frac{3}{|\overrightarrow{PA}|}$，故D正确.

故选BCD.

13.【答案】$-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$

【解析】$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=-\frac{2}{3}$，又$|\boldsymbol{b}|=2$，$\therefore|\boldsymbol{a}|\cos\theta=-\frac{1}{3}$，又$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{2}$，

所以向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$方向上的投影向量为 $\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$. 故答案为$-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

14.【答案】29

【解析】因为$\left(x-\frac{1}{x}+1\right)^7=\sum\limits_{r=0}^{7}\sum\limits_{s=0}^{7-r}C_7^rC_{7-r}^sx^r\left(-\frac{1}{x}\right)^s$，

故所求常数项为$C_7^0C_7^0-C_7^1C_6^1+C_7^2C_5^2-C_7^3C_4^3=1-42+210-140=29$. 故答案为29.

15.【答案】1

【解析】由题意知，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$，且$4S_n=a_n^2+2a_n-3$，

则当$n\geqslant2$时，$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3$，两式相减得$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$，

因此$a_n-a_{n-1}=2$，而$4a_1=4S_1=a_1^2+2a_1-3$，即$a_1^2-2a_1-3=0$，又$a_1>0$，解得$a_1=3$，

数列$\{a_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，因此$a_n=2n+1$，

$b_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$，

$$T_{2n}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)-\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)$$，

$T_{2n-1}=T_{2n}-b_{2n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4n+1}\right)$，

数列$\{T_{2n}\}$是单调递增的，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_{2n}<\frac{1}{12}$，

而数列$\{T_{2n-1}\}$是单调递减的，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_{2n-1}\leqslant b_1=\frac{2}{15}$，

因为$\forall n\in\mathbf{N}^*$，不等式$T_n<\lambda$恒成立，则$\forall n\in\mathbf{N}^*$，不等式$T_{2n}<\lambda$且$T_{2n-1}<\lambda$恒成立，

因此$\lambda\geqslant\frac{1}{12}$且$\lambda>\frac{2}{15}$，即有$\lambda>\frac{2}{15}$，又$\lambda\in\mathbf{N}$，所以$\lambda$的最小值是1.

故答案为1.

16.【答案】$-e-3$

【解析】由题意知，不等式 $\ln(x-1)+(1-k)x\leqslant b$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $t=x-1>0$，则 $\ln t+t+1-k(t+1)\leqslant b$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $f(t)=\ln t+t+1-k(t+1)$，所以 $f'(t)=\frac{1}{t}+1-k$，

若 $k\leqslant1$，则 $f'(t)>0$，$f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，当 $t\to+\infty$ 时，$f(t)\to+\infty$，不等式不成立，

故 $k>1$，当 $0<t<\frac{1}{k-1}$ 时，$f'(t)>0$，当 $t>\frac{1}{k-1}$ 时，$f'(t)<0$，

所以当 $t=\frac{1}{k-1}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $f\left(\frac{1}{k-1}\right)=\ln\frac{1}{k-1}-1+1-k=-\ln(k-1)-k$，

所以 $-\ln(k-1)-k\leqslant b$，所以 $\ln(k-1)+k-1\geqslant-2-(b-1)$，所以 $\frac{b-1}{k-1}\geqslant\frac{-2}{k-1}-\frac{\ln(k-1)}{k-1}-1$，

令 $g(k-1)=\frac{-2}{k-1}-\frac{\ln(k-1)}{k-1}-1$，$u=k-1$，则 $g(u)=\frac{-2}{u}-\frac{\ln u}{u}-1$，

所以 $g'(u)=\frac{2}{u^2}-\frac{1-\ln u}{u^2}=\frac{1+\ln u}{u^2}$，当 $0<u<\frac{1}{e}$ 时 $g'(u)<0$，当 $u>\frac{1}{e}$ 时，$g'(u)>0$，

所以当 $u=\frac{1}{e}$ 时，$g(u)$ 取得最小值 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-e-1$，$\frac{b-1}{k-1}$ 的最小值是 $-e-1$.

又 $\frac{b-2k+1}{k-1}=\frac{b-1-2(k-1)}{k-1}=\frac{b-1}{k-1}-2$，所求最小值是 $-e-3$.

故答案为 $-e-3$.

17.【答案】(1) $a_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$；(2) $T_n=6-(n+3)\times\frac{2^{n+1}}{3^n}$

【解析】(1)若选择①，则 $18a_2=8a_1+9a_3$，即 $9q^2-18q+8=0$，解得 $q=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$，

又数列 $\{a_n\}$ 单调递减，故 $q=\frac{2}{3}$，此时 $a_n=a_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$；

若选择②，则当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=6-2a_1$，即 $a_1=2$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(6-2a_n)-(6-2a_{n-1})$，即 $a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}$，故 $a_n=a_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$；

若选择③，$n\geqslant2$ 时，则 $3^{n-1}a_n=(a_1+3a_2+\cdots+3^{n-1}a_n)-(a_1+3a_2+\cdots+3^{n-2}a_{n-1})=(2^{n+1}-2)$
$-(2^n-2)=2^n$，$a_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$；当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 符合上式，即 $a_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. ……… 5 分

(2) $\frac{na_n}{3}=n\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$，则 $T_n=1\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

则 $\frac{2}{3}T_n=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$，

两式相减得 $\frac{1}{3}T_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n-n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$，

从而有 $T_n=6-(n+3)\times\frac{2^{n+1}}{3^n}$. …………………………………………………………… 10 分

18.【答案】(1) $A=\frac{2\pi}{3}$；(2) $\sqrt{3}$

【解析】(1)解：因为 $2a\cos B=2c+b$，由正弦定理可得 $2\sin A\cos B=2\sin C+\sin B$，即

$2\sin A\cos B=2\sin(A+B)+\sin B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B+\sin B$，所以 $\cos A\sin B=-\frac{1}{2}\sin B$，

而 $B\in(0,\pi)$，$\therefore\sin B\neq 0$，故 $\cos A=-\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$；……………… 5 分

(2)解：由题意可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

由角平分线性质和三角形面积公式得 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}b\times1\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\times1\times\sin\frac{\pi}{3}$，

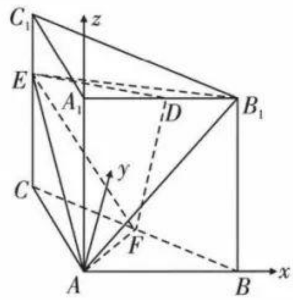
化简得 $bc=b+c$，又 $bc=b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，从而 $bc\geqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2}{3}\pi\geqslant\sqrt{3}$，因此 $S_{\triangle ABC}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$. …………………………………… 12 分

19.【答案】(1)答案见解析；(2)$\frac{11}{7}\sqrt{14}$

【解析】(1)在 $\triangle A_1AB$ 和 $\triangle A_1AC$ 中由勾股定理知 $A_1A\perp AB$，$A_1A\perp AC$，从而可知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$B_1(2,0,4\sqrt{2})$，$C_1(-1,\sqrt{3},4\sqrt{2})$，



于是 $E(-1,\sqrt{3},3\sqrt{2})$，$F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

从而 $\overrightarrow{AE}=(-1,\sqrt{3},3\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EB_1}=(3,-\sqrt{3},\sqrt{2})$，

由 $\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{AE}=3\times(-1)+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=0$，

$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\times3+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})+\sqrt{2}\times0=0$，

知 $B_1E\perp AE$，$B_1E\perp AF$，又 AE，$AF\subset$ 平面 AEF，

且 $AE\cap AF=A$，故 $B_1E\perp$ 平面 AEF. …………………………………………………………… 5 分

(2)由 $D(1,0,4\sqrt{2})$，知 $\overrightarrow{ED}=(2,-\sqrt{3},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{FE}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\sqrt{2}\right)$，

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=2x-\sqrt{3}y+\sqrt{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+3\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=\sqrt{2}$，则 $x=14$，$y=10\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{n}=(14,10\sqrt{3},\sqrt{2})$；

又由(1)知平面 AEF 的法向量为 $\overrightarrow{EB_1}=(3,-\sqrt{3},\sqrt{2})$，故求二面角 $A-EF-D$ 的余弦值为

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EB_1}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EB_1}|}=\frac{14\times3+10\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{14^2+(10\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}}=\sqrt{\frac{7}{249}}$，

其正弦值为 $11\sqrt{\frac{2}{249}}$，故其正切值为 $\frac{11}{7}\sqrt{14}$. …………………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)$y=ex^{\frac{1}{2}}$；(2)答案见解析

【解析】(1)因为散点 $(v_i,\omega_i)(1\leqslant i\leqslant 6)$ 集中在一条直线附近，设回归方程为 $\omega=bv+a$，

由 $\overline{v}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}v_i=4.1$，$\overline{\omega}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\omega_i=3.05$，

则 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(v_i-\overline{v})\cdot(\omega_i-\overline{\omega})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(v_i-\overline{v})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}v_i\omega_i-6\overline{v}\cdot\overline{\omega}}{\sum\limits_{i=1}^{6}v_i^2-6\overline{v}^2}=\dfrac{75.3-6\times4.1\times3.05}{101.4-6\times4.1\times4.1}=\dfrac{1}{2}$,

$a=3.05-\dfrac{1}{2}\times4.1=1$,故变量 ω 关于 v 的回归方程为 $\omega=\dfrac{1}{2}v+1$. 又 $v_i=\ln x_i$,$\omega_i=\ln y_i$,

故 $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln x+1\Rightarrow y=\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}$,综上,$y$ 关于 x 的回归方程为 $y=\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}$. ······················ 6 分

(2)由 $T(x)=\dfrac{x+36}{y}=\dfrac{x+36}{\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{36}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\in\left(\dfrac{85}{7\mathrm{e}},\dfrac{68}{5\mathrm{e}}\right)$,解得 $\dfrac{85}{7}<x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{36}{x^{\frac{1}{2}}}<\dfrac{68}{5}$,

而 $\dfrac{85}{7}=7+\dfrac{36}{7}$,$\dfrac{68}{5}=10+\dfrac{36}{10}$,所以 $x=58,68,78,88$ 即 C、D、E、F 为"主打套餐".

则四人中使用"主打套餐"的人数 X 服从超几何分布,$X=2,3,4$,

且 $P(X=2)=\dfrac{C_2^2\cdot C_4^2}{C_6^4}=\dfrac{2}{5}$,$P(X=3)=\dfrac{C_2^1\cdot C_4^3}{C_6^4}=\dfrac{8}{15}$,$P(X=4)=\dfrac{C_2^0\cdot C_4^4}{C_6^4}=\dfrac{1}{15}$.

X 分布列为

X	2	3	4
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

∴期望 $E(X)=2\times\dfrac{2}{5}+3\times\dfrac{8}{15}+4\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{8}{3}$. ·· 12 分

21.【答案】(1)答案见解析;(2)$m\leqslant1$

【解析】(1)$f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}$,

①当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}>0$,此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

②当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{\mathrm{e}^x}>0$ 得 $x>\dfrac{1}{2}\ln a$,此时函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln a\right)$ 上单调递减,

在 $\left(\dfrac{1}{2}\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增;

综上所述:当 $a\leqslant0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln a\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{2}\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增. ······································ 5 分

(2)解法一:由题意知 $f'(0)=1-a=\dfrac{2-(1+a)}{3}$,解得 $a=1$,则 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant2+mx^2$,

即 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-mx^2-2\geqslant0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

定义 $g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-mx^2-2$,则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2mx$,$g''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2m$,

①当 $m\leqslant1$ 时,$g''(x)\geqslant0$,$g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,又 $g'(0)=0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 成立.

②当 $m>1$ 时,由 $g''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2m=0$ 解得 $x_1=\ln(m-\sqrt{m^2-1})<0$,

$x_2=\ln(m+\sqrt{m^2-1})>0$,可知 $g'(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增,

在 (x_1,x_2) 上单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增,又 $g'(0)=0$,

从而 $x\in(x_1,0)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,x_2)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，
又 $g(0)=0$，所以当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g(x)<0$，不合题意.
故实数 m 的取值范围为 $m\leqslant1$. ………………………………………………………… 12 分

解法二：令 $g(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2-mx^2$，注意到 $g(0)=0$，

要使不等式恒成立，则 $g(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2-mx^2$ 在 $x=0$ 附近左侧单调递减，在 $x=0$ 附近右侧单调递增，

而 $g'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2mx$，
所以在 $x=0$ 附近左侧 $g'(x)<0$，在 $x=0$ 附近右侧 $g'(x)>0$，又 $g'(0)=0$，
所以在 $x=0$ 附近左右两侧很小的一个区间 $(-\xi,\xi)$ 内，$g'(x)$ 递增.
设 $g''(x)$ 为 $g'(x)$ 的导函数.
$g''(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2m$，而 $g''(0)=2-2m$，
由 $g''(x)\geqslant0$ 可得 $2-2m\geqslant0$，即 $m\leqslant1$.（这是恒成立的必要条件）
下面再证其充分性：
当 $m\leqslant1$ 时，因为 $e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant2$，所以 $g''(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2m\geqslant0$.
此时 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增，$g'(x)=0$.
所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.
所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)$ 递减；$x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)$ 递增.
故 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $g(x)\geqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.
综上可知：对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geqslant2+mx^2$ 成立时，$m\leqslant1$.

22.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2) 是定值，$\lambda^2+\mu^2=1$.

【解析】(1) 由题意可知：椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt3}{2}$，因此 $a=2b$，

故椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=t(t>0)$，令 $tb^2=s$，则椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4s}+\frac{y^2}{s}=1(a>0)$，

将 $y=x$ 代入可得 $x=\pm2\sqrt{\frac{s}{5}}$，因此被直线 $y=x$ 截得的线段长为 $\sqrt2\times4\sqrt{\frac{s}{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，

可得 $s=1$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………… 4 分

(2) 由题意得，C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2t_2\,(a>b>0)$；$C_2$：$\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t_2\,(a>b>0)$，

① 当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB：$x=\pm\sqrt{t_2}\,a$，
若 $x=\sqrt{t_2}\,a$，不妨设点 A 在 x 轴的上方，则 $A(\sqrt{t_2}\,a,\sqrt{t_2}\,b)$，$B(\sqrt{t_2}\,a,-\sqrt{t_2}\,b)$，
又 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，所以 $Q(\sqrt{t_2}\,a(\lambda+\mu),\sqrt{t_2}\,b(\lambda-\mu))$，
代入 C_1 中，得 $(\lambda+\mu)^2+(\lambda-\mu)^2=2$，即 $\lambda^2+\mu^2=1$；
若 $x=-\sqrt{t_2}\,a$，同理亦可得 $\lambda^2+\mu^2=1$. ……………………………………………… 5 分

②当直线 AB 斜率存在时，设直线 AB：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，得 $Q(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=t_2\end{cases}$ 可得：$b^2x^2+a^2(kx+m)^2=t_2a^2b^2$，

即：$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-t_2b^2)=0$.

$\therefore\Delta=(2a^2km)^2-4(b^2+a^2k^2)a^2(m^2-t_2b^2)=0$，即：$m^2=t_2(b^2+a^2k^2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2t_2\end{cases}$ 可得：$b^2x^2+a^2(kx+m)^2=2t_2a^2b^2$，

即：$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-2t_2b^2)=0$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{a^2(m^2-2t_2b^2)}{b^2+a^2k^2}$，$x_1+x_2=\dfrac{-2a^2km}{b^2+a^2k^2}$，…………………………………………………… 7 分

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{b^2(m^2-2t_2a^2k^2)}{b^2+a^2k^2}$，

$\therefore b^2x_1x_2+a^2y_1y_2=\dfrac{a^2b^2(m^2-2t_2b^2)}{b^2+a^2k^2}+\dfrac{a^2b^2(m^2-2t_2a^2k^2)}{b^2+a^2k^2}=\dfrac{2a^2b^2(m^2-t_2b^2-t_2a^2k^2)}{b^2+a^2k^2}=0$，

因为点 Q 在椭圆 C_1 上，所以，$\dfrac{(\lambda x_1+\mu x_2)^2}{a^2}+\dfrac{(\lambda y_1+\mu y_2)^2}{b^2}=2t_2$，

整理，得 $\lambda^2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)+\mu^2(b^2x_2^2+a^2y_2^2)+2\lambda\mu(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)-2t_2a^2b^2=0$，

又∵$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在 C_1 上，$\therefore b^2x_1^2+a^2y_1^2=b^2x_2^2+a^2y_2^2=2t_2a^2b^2$，

$\therefore 2t_2a^2b^2(\lambda^2+\mu^2-1)=0$，又 $2t_2a^2b^2>0$，因此 $\lambda^2+\mu^2=1$.

综上所述，$\lambda^2+\mu^2$ 为定值，且 $\lambda^2+\mu^2=1$. …………………………………………………… 12 分