渭南市2023年高三教学质量检测（Ⅱ）

数学试题（理科）参考答案

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	A	C	A	C	B	A	D	B	D

二、填空题（共20分）

13. $\frac{8}{3}$

14. $x=1$或$3x-4y+5=0$或$7x+24y+25=0$　三条中任写一条即可。

15. 288

16. ①④⑤　（不全得2分，有错为零分）

三、解答题（共70分）

17.（12分）解：（Ⅰ）联结BC，在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得，

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{16+12-2\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2,$$

所以$\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\times2\times\pi\times1=\pi$，即$\overset{\frown}{BC}$的长度为$\pi$(km)；……6分

（Ⅱ）记$AD=a$，$CD=b$，则在$\triangle ACD$中，由余弦定理可得：

$a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=16$，即$a^2+b^2-ab=16$，……8分

从而$(a+b)^2=16+3ab\leqslant16+3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

所以$\frac{1}{4}(a+b)^2\leqslant16$，则$a+b\leqslant8$，当且仅当$a=b=4$时，等号成立；……10分

新建健康步道$A-D-C$的最长路程为8(km)，

故新建的健康步道A-D-C的路程最多可比原有健康步道A-B-C的路程增加

$8-\pi-2\sqrt{3}$ (km)．……12分

18.（12 分）解：（Ⅰ）由已知 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $P\left(X\leqslant 2\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)$

$=C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}=\frac{11}{32}$ ； ……………5 分

（Ⅱ）由已知 $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，所以 $E\left(X\right)=0.5n, D\left(X\right)=0.25n$， ……………7 分

若 $0.4\leqslant\frac{X}{n}\leqslant 0.6$，则 $0.4n\leqslant X\leqslant 0.6n$，即 $-0.1n\leqslant X-0.5n\leqslant 0.1n$，

即 $\left|X-0.5n\right|\leqslant 0.1n$ ……………………………………………………………………9 分

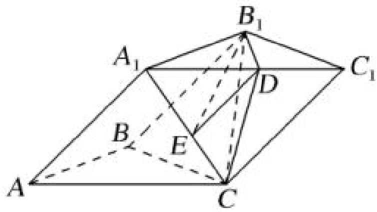
由切比雪夫不等式 $P\left(\left|X-0.5n\right|\leqslant 0.1n\right)\geqslant 1-\frac{0.25n}{(0.1n)^2}$，

要使得至少有 98% 的把握使发射信号“1”的频率在 0.4 与 0.6 之间，则 $1-\frac{0.25n}{(0.1n)^2}\geqslant 0.98$，

解得 $n\geqslant 1250$，所以估计信号发射次数 n 的最小值为 1250;

综上，$P\left(X\leqslant 2\right)=\frac{11}{32}$ ，估计信号发射次数 n 的最小值为 1250…………………12 分

19.（12 分）（Ⅰ）证明：如图，取 A_1C_1 的中点 D，连接 B_1D，CD，



∵$C_1C=A_1A=A_1C$，

∴$CD\perp A_1C_1$，………………………………………2 分

∵底面△ABC 是边长为 2 的正三角形，

∴$AB=BC=2$，$A_1B_1=B_1C_1=2$，

∴$B_1D\perp A_1C_1$，………………………………………………………………………………4 分

又 $B_1D\cap CD=D$，

∴$A_1C_1\perp$平面 B_1CD，且 $B_1C\subseteq$平面 B_1CD，

∴$A_1C_1\perp B_1C$.………………………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）解：法一　如图，过点 D 作 $DE\perp A_1C$ 于点 E，连接 B_1E.

∵侧面 AA_1C_1C⊥底面 ABC，

∴侧面 AA_1C_1C⊥平面 $A_1B_1C_1$，又 $B_1D\perp A_1C_1$，侧面 $AA_1C_1C\cap$平面 $A_1B_1C_1=A_1C_1$，

∴B_1D⊥侧面 AA_1C_1C，又 $A_1C\subseteq$平面 AA_1C_1C，

∴$B_1D\perp A_1C$，又 $DE\perp A_1C$ 且 $B_1D\cap DE=D$，

∴A_1C⊥平面 B_1DE，∴$B_1E\perp A_1C$，

∴$\angle B_1ED$ 为所求二面角的平面角，……………………………………………………9 分

∵$A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=2$，∴$B_1D=\sqrt{3}$，

又 $ED=\frac{1}{2}CC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\tan\angle B_1ED=\frac{B_1D}{ED}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$，

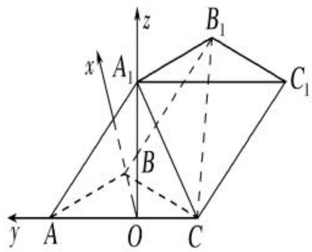
∴二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$ ………………………………………………..12 分

法二　如图，取 AC 的中点 O，以 O 为坐标原点，射线 OB，OC，OA_1 分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

则 $O(0，0，0)$，$B(\sqrt{3}，0，0)$，$A_1(0，0，1)$，$B_1(\sqrt{3}，-1，1)$，$C_1(0，-2，1)$，

$C(0，-1，0)$……………………………………………………………………………………7 分

∴$\overrightarrow{A_1B_1}=(\sqrt{3}，-1，0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0，-1，-1)$，



设 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$为平面 A_1B_1C 的法向量，

$$∴\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=y+z=0,\end{cases}$$

令 $y=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(1，\sqrt{3}，-\sqrt{3})$，……………………………………………..8 分

又 $\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3}，0，0)$为平面 A_1C_1C 的一个法向量，…………………………………9 分

设二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的大小为θ，显然θ为锐角，

$$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OB}\right\rangle\right|=\frac{\left|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB}\right|}{|\boldsymbol{m}|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{\sqrt{7}}{7}，$$ ……………………………………………….....11 分

则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$，∴二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$ …………………………..12 分

20.（12 分）解：（Ⅰ）直线 BF 方程为 $y=x-1$，与椭圆联立可解得 C（$\frac{4}{3},\frac{1}{3}$），

四边形 $ABOC$ 的面积 $=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.……………………………………………………4 分

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，有 $x_1x_2+2y_1y_2=0$

又 M，N 在椭圆上，有 $x_1^2+2y_1^2=2, x_2^2+2y_2^2=2$ ……………………………………………6 分

设点 $P(x,y)$，由题意可得 $(x,y)=(x_1,y_1)+2(x_2,y_2)=(x_1+2x_2,y_1+2y_2)$

即 $\begin{cases} x=x_1+2x_2 \\ y=y_1+2y_2 \end{cases}$ ………………………………………………………………………………8 分

$x^2+2y^2=(x_1+2x_2)^2+2(y_1+2y_2)^2$,

$=(x_1^2+2y_1^2)+4(x_2^2+2y_2^2)+4(x_1x_2+2y_1y_2)=10$ ……………………………………………10 分

所以点 P 的轨迹在椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ 上,

所以存在两个定点 $G(-\sqrt{5},0)$，$H(\sqrt{5},0)$，使得 $|PG|+|PH|$ 为定值 $2\sqrt{10}$ ……………12分

21.（12 分）（Ⅰ）解：令 $y=e^x-x-1$，$y'=e^x-1$，由 $y'=0$，解得 $x=0$

当 $x<0$ 时，$y'<0$; 当 $x>0$ 时，$y'>0$;

所以 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty,0]$ 递减，$[0,+\infty)$ 递增，

即 $y\geqslant e^0-0-1=0$，即 $f(x)\geqslant x+1$ ……………………………………………………3 分

（Ⅱ）由 $f(x)\geqslant g(x)$ 可得：$-m\leqslant\frac{xe^x-(\ln x+1)}{x}=\frac{e^{\ln x}\cdot e^x-(\ln x+1)}{x}=\frac{e^{\ln x+x}-(\ln x+1)}{x}$

由（Ⅰ）知 $e^{\ln x+x}\geqslant\ln x+x+1$（当且仅当 $\ln x+x=0$ 取等号），

$\frac{e^{\ln x+x}-(\ln x+1)}{x}\geqslant\frac{(\ln x+x+1)-(\ln x+1)}{x}=1$，所以 $-m\leqslant 1$，即 $m\geqslant -1$ ……………7 分

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $e^x\geqslant x+1$，令 $x=\frac{1}{k}-1(k\in N_+)$，可得 $e^{\frac{1}{k}-1}\geqslant\frac{1}{k}-1+1=\frac{1}{k}$

所以 $\left(\frac{1}{k}\right)^k\leqslant e^{1-k}=\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ ………………………………………………………………10 分

因为数列$\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}\right\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{e}$的等比数列

所以$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{k} \leqslant \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n}}{1-\frac{1}{e}} < \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$ ………………………………………………..........12 分

22.（10 分）解：（Ⅰ）曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos\alpha}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}, \end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$），

所以$x^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \frac{y^2}{3}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$，所以$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

即曲线 C 的普通方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………………………………3 分

直线 l 的极坐标方程为$\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则$\rho\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$，

转换为直角坐标方程为$x-\sqrt{3}y-2=0$． ……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）直线 l 过点 $P(2,0)$，直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t, \end{cases}$（$t$ 为参数）令点 A，B 对应的

参数分别为t_1，t_2，

由$\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$代入$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，得$2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$，则$t_1+t_2=-3\sqrt{3}$，$t_1t_2=\frac{9}{2}$，

即 t_1、t_2 为负，

故$\left|\frac{1}{|PA|}-\frac{1}{|PB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\left|\frac{|t_2|-|t_1|}{|t_1t_2|}\right|=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{2}{3}$． ……………..10 分

23.（10 分）解：（Ⅰ）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|+2|x-1|$，

当$x\leqslant -1$，$f(x)=-3x+1$，$f(x)_{\min}=f(-1)=4$；

当$-1<x<1$，$f(x)=-x+3$，$f(x)\in(2,4)$；

当 $x \geqslant 1$， $f(x)=3x-1$， $f(x)_{\min}=f(1)=2$；

$\therefore$ 当 $a=1$ 时， $f(x)$ 的最小值为 2． ……………………………………………………………5 分

（Ⅱ） $a>0$， $b>0$，当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，

$|x+a|+2|x-1|>x^2-b+1$ 可化为 $a+b>x^2-3x+3$，

令 $h(x)=x^2-3x+3$， $x \in [1,2]$， $h(x)_{\max}=h(1)=h(2)=1$， $\therefore a+b>1$ …………………7 分

$$\therefore \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+b^2+a+b+\frac{1}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}+a+b+\frac{1}{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时取得等号；

又当 $a+b>1$ 时， $\dfrac{(a+b)^2}{2}+a+b+\dfrac{1}{2}>2$，

故 $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2>2$． ……………………………………………………………………………10 分